אוניברסיטת בן גוריון בנגב **מדור בחינות**	תאריך הבחינה 05.07.10 מרצה: פרופ' ל. פריגוזין מבחן ב: **מבוא למשוואות דיפרנציאליות** מס' הקורס 0201.1.9031 מועד א סמ' ב **משך הבחינה- 3 שעות** **חומר עזר:** דף נוסחאות אחד (משני צדדים), מחשבון

פשוט

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות (משקל של כל שאלה שווה ל-25 נקודות)
ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד.
לטיוטה השתמשו במחברת מצורפת לשאלון זה.

בהצלחה!

שאלה מס' 1.

1א) (12 נק') מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה

$$dx + (1-x^2)\cot y\, dy = 0$$

1) $1-x^2=0 \longrightarrow x=\pm 1$

2) $\frac{dx}{x^2-1} = \frac{\cos y}{\sin y}dy$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{d\sin y}{\sin y}$

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \ln|\sin y| + C$

תשובה:

$\frac{x-1}{x+1} = C\sin^2 y$

$x=-1$

1ב) (13 נק') פתרו בעיית תנאי ההתחלה

$$\underbrace{(x+y\cos x)}_{M}dx+\underbrace{\left(\sin x+\frac{1}{1+y^2}\right)}_{N}dy=0,\qquad y(0)=1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos x=\frac{\partial N}{\partial x}$$ מ.מדוייקת:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=x+y\cos x$$

$$\varphi=\frac{x^2}{2}+y\sin x+h(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\sin x+h'(y)=\sin x+\frac{1}{1+y^2}$$

$$h'(x)=\frac{1}{1+y^2}\qquad h(y)=\operatorname{arctg} y$$

פתרון כללי:

$$\frac{x^2}{2}+y\sin x+\operatorname{arctg} y=C$$

פתרון פרטי:

$$y(0)=1\Rightarrow$$

$$C=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{2}+y\sin x+\operatorname{arctg} y=\frac{\pi}{4}}$$

שאלה מס' 2. פתרו את המשוואה הבאה $yy'' + (y')^3 = 0$

עם תנאי ההתחלה $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

$$y' = p(y) \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$yp\frac{dp}{dy} + p^3 = 0$$

1) $p = 0 \longrightarrow y = C$

2) $y\frac{dp}{dy} = -p^2 \qquad \frac{dp}{p^2} = -\frac{dy}{y}$

$$\frac{1}{p} = \ln|y| + C$$

$x=0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \ln 1 + C \qquad C = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \ln|y| + \frac{1}{2}$$

$$2\frac{dx}{dy} = \ln y^2 + 1$$

$$2x = \int(\ln y^2 + 1)\,dy =$$

$$= (\ln y^2 + 1)y - \int y\frac{1}{y^2}\cdot 2y\,dy =$$

$$= (\ln y^2 + 1)y - 2y + C$$

$$2x = y(\ln y^2 - 1) + C$$

$x=0 \Rightarrow \quad 0 = 1(\ln 1 - 1) + C \Rightarrow C = 1$

$\underline{2x = y(\ln y^2 - 1) + 1}$;תשובה

שאלה מס' 3.

3א) (15 נק') יהיו $y_1(x), \quad y_2(x)$ שני פתרונות של משוואה ליניארית הומוגנית

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

הוכיחו כי ורונסקיאן שלהם, $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$, מקיים את המשוואה הבאה:

$$W' + p(x)W = 0.$$

$y_2 \cdot \quad y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$

$y_1 \cdot \quad y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \quad \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{y_2 y_1'' - y_1 y_2''}_{-W'} + p\underbrace{(y_2 y_1' - y_1 y_2')}_{-W} = 0$$

$$W' = (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1''$$

$$= y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

$$-W' - pW = 0$$

$$W' + pW = 0$$

3ב) (10 נק') מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה: $y''' + 27y = e^{-3x}$

$r^3 + 27 = 0$

$r_1 = -3$

$r_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$r_3 = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

פתרון כללי של מ. הומוגנית:

$$\tilde{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{\frac{3}{2}x}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}x + C_3 e^{\frac{3}{2}x}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}x$$

פתרון פרטי של מ. אי-הומוגנית:

$\hat{y} = Axe^{-3x}$

$\hat{y}' = A(1-3x)e^{-3x}$

$y'' = A(-6+9x)e^{-3x}$

$y''' = 27A(1-x)e^{-3x}$

$27Ae^{-3x}(1-x) + 27Axe^{-3x} = e^{-3x}$

$A = \frac{1}{27}$ $\qquad \hat{y} = \frac{x}{27}e^{-3x}$

$$y = \tilde{y} + \hat{y}$$

שאלה מס' 4. מצאו פתרון כללי של מערכת

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y + 15e^t\sqrt{t} \end{cases}$$

$$x'' = 3x' - 2y' = 3x' - 2(2x - y + 15e^t\sqrt{t}) =$$
$$= 3x' - 4x + 2y - 30e^t\sqrt{t}$$

$$2y = 3x - x'$$

$$x'' = 3x' - 4x + 3x - x' - 30e^t\sqrt{t}$$

$$x'' - 2x' + x = -30e^t\sqrt{t}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$x_1 = e^t, \quad x_2 = te^t$ קבוצה בסיסית של פתרונות;

$$\begin{cases} c_1'e^t + c_2'te^t = 0 \\ c_1'e^t + c_2'(t+1)e^t = -30e^t\sqrt{t} \end{cases}$$

$$c_2' = -30\sqrt{t} \qquad c_2 = -20t^{3/2} + c_{20}$$

$$c_1' = 30t^{3/2} \qquad c_1 = 12t^{5/2} + c_{10}$$

<u>תשובה:</u>

$$\begin{cases} x(t) = (12t^{5/2} + c_{10})e^t + (-20t^{3/2} + c_{20})te^t \\ y(t) = \frac{1}{2}(3x(t) - x'(t)) \end{cases}$$

שאלה מס' 5. פתרו את הבעיה הבאה בעזרת התמרת לפלס:

$$y''+3y=\int_0^t \sin(t-\tau)\cos(2\tau)d\tau+\delta(t-1)+u_\pi(t)\cos(5t),$$

$$y(0)=1,\quad y'(0)=-1.$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \sin(t-\tau)\cos 2\tau\, d\tau\right]=\mathcal{L}\left[\sin t * \cos 2t\right]=$$

$$=\mathcal{L}[\sin t]\cdot\mathcal{L}[\cos 2t]=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+4}$$

$\cos 5t=-\cos 5(t-\pi)$

$$(s^2+3)Y-s+1=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+4}+e^{-s}-e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+25}$$

$$Y=\underbrace{\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+3)}}+e^{-s}\frac{1}{s^2+3}+e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+3)(s^2+25)}+$$

$$+\frac{s}{s^2+3}-\frac{1}{s^2+3}=$$

$$=\overbrace{\frac{1}{6}\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{3}\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+3}}+\frac{e^{-s}}{s^2+3}+$$

$$+\frac{e^{-\pi s}}{22}\left(\frac{s}{s^2+3}-\frac{s}{s^2+25}\right)+\frac{s}{s^2+3}-\frac{1}{s^2+3}$$

$$y(t)=\frac{1}{6}\cos t+\frac{1}{3}\cos 2t-\frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t)+u_1(t)\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left[\sqrt{3}(t-1)\right]+$$

$$+\frac{1}{22}u_\pi(t)\left[\cos\sqrt{3}(t-\pi)-\cos 5(t-\pi)\right]+\cos\sqrt{3}t-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)$$

טבלה: התמרת לפלס

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. $t^n; \quad n =$ positive integer	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. $t^p, \ p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \|a\|$
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \|a\|$
9. $e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
10. $e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at}, \ n =$ positive integer	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$