אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 9.02.11
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
מבחן ב: **מבוא למשוואות דיפרנציאליות**
מס' הקורס 0201.1.9031
מועד ב סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות אחד (משני צדדים), מחשבון פשוט

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות (משקל של כל שאלה שווה ל-25 נקודות)
ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד.
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).

בהצלחה!

שאלה מס' 1. פתרו בעיית תנאי התחלה

$$dy\left(2x^3 y\ln y - x\right) = ydx, \quad y(1)=1$$

1. $dy=0 \to y=c \to \begin{cases} y=0 \longrightarrow \\ dx=0 \longrightarrow \end{cases}$ אין פתרונות

2. $y\dfrac{dx}{dy} = 2x^3\ln y - x$ משוואת ברנולי

$x\equiv 0 \to$ לא מקיים תנאי התחלה,

$x^{-3}\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{1}{y}x^{-2} = 2\ln y \qquad v = x^{-2} \qquad \dfrac{dv}{dy} = -2x^{-3}\dfrac{dx}{dy}$

$-\dfrac{1}{2}\dfrac{dv}{dy} + \dfrac{v}{y} = 2\ln y \to \dfrac{dv}{dy} - \dfrac{2}{y}v = -4\ln y$

$v = C(y)e^{\int\frac{2}{y}dy} = C(y)y^2$

$C'(y)y^2 = -4\ln y \to C' = -\dfrac{4}{y^2}\ln y$

$C(y) = 4\int \ln y\, d\left(\dfrac{1}{y}\right) = 4\left(\dfrac{\ln y}{y} - \int\dfrac{dy}{y^2}\right) = 4\left(\dfrac{\ln y}{y} + \dfrac{1}{y}\right) + C_0$

$x^{-2} = \left[\dfrac{4}{y}(\ln y + 1) + C_0\right]y^2 = 4y(\ln y+1) + C_0y^2$

$y(1)=1 \to \quad 1 = 4 + C_0 \qquad C_0 = -3$

$$\boxed{\frac{1}{x^2} = 4y(\ln y + 1) - 3y^2}$$

שאלה מס' 2.

2א) (12 נק') מצאו פתרון כללי של המשוואה האי-הומוגנית הבאה

$$y'' - (2 - \tan x)y' + (1 - \tan x)y = e^x \cos x$$

כאשר נתון פתרון פרטי אחד, $y_1 = e^x$, של משוואה הומוגנית.

פתרון כללי של מ. הומוגנית:

$$\tilde{y} = C_1 e^x \int \frac{e^{\int (2 - tg x)dx}}{e^{2x}} dx + C_2 e^x =$$

$$= C_1 e^x \int \frac{e^{2x + \int \frac{d\cos x}{\cos x}}}{e^{2x}} dx + C_2 e^x =$$

$$= C_1 e^x \int \cos x \, dx + C_2 e^x = C_1 e^x \sin x + C_2 e^x$$

וריאציה של פרמטרים שרירותיים:

$$\begin{cases} C_1' e^x \sin x + C_2' e^x = 0 \\ C_1' e^x (\sin x + \cos x) + C_2' e^x = e^x \cos x \end{cases}$$

$$C_1' = 1 \qquad C_1 = x + C_{10}$$

$$C_2' = -C_1' \sin x = -\sin x \qquad C_2 = \cos x + C_{20}$$

$$y = (x \sin x + \cos x)e^x + C_{10} e^x \sin x + C_{20} e^x$$

2ב) (13 נק') מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה:

$$y^{(4)}+4y=xe^{x}+\cos 3x+2\sin 3x$$

$z^4+4=0 \qquad z^4=4e^{i\pi}$

$|z|=\sqrt{2}$

$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i$

$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=-1+i$

$z_3=\bar{z}_1=1-i$

$z_4=\bar{z}_2=-1-i$

$\tilde{y}=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^{x}+(C_3\cos x+C_4\sin x)e^{-x}$

$f_1=xe^{x} \longrightarrow \hat{y}_1=(Ax+B)e^{x}$

$y_1'=(Ax+B+A)e^{x} \qquad y_1''=(Ax+B+2A)e^{x} \qquad y_1'''=(Ax+B+3A)e^{x}$

$y_1^{(4)}=(Ax+B+4A)e^{x}$

$Ax+B+4A+4Ax+4B=x$

$5A=1 \qquad 5B+4A=0 \Longrightarrow A=\frac{1}{5} \qquad B=-\frac{4}{25}$

$\hat{y}_1=\frac{1}{5}\left(x-\frac{4}{5}\right)e^{x}$

$f_2=\cos 3x+2\sin 3x \longrightarrow \hat{y}_2=C\cos 3x+D\sin 3x$

$\hat{y}_2^{(4)}=3^4(C\cos 3x+D\sin 3x)$

$(3^4+4)C\cos 3x+(3^4+4)D\sin 3x=\cos 3x+2\sin 3x$

$C=\frac{1}{85} \qquad D=\frac{2}{85}$

$\hat{y}_2=\frac{1}{85}(\cos 3x+2\sin 3x)$

$$\boxed{y=\tilde{y}+\hat{y}_1+\hat{y}_2}$$

שאלה מס' 3. מצאו פתרון כללי של מערכת

$$\begin{cases} x' = y + z + 1 \\ y' = x + y + e^t \\ z' = z - x \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= y' + z' = x + y + e^t + z - x = y + z + e^t \\ x' &= y + z + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$x'' - x' = e^t - 1$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \qquad \lambda = 0, 1$$

$$\tilde{x} = C_1 + C_2 e^t$$

$$\hat{x} = Bt + Ate^t$$

$$B = +1$$

$$A = 1$$

$$\boxed{x = C_1 + C_2 e^t + t + te^t}$$

$$z' - z = -x = -t - te^t - C_1 - C_2 e^t$$

$$z = C(t) e^t$$

$$C' e^t = -t - te^t - C_1 - C_2 e^t$$

$$C' = -te^{-t} - t - C_1 e^{-t} - C_2$$

$$C = \int (-t - C_1) e^{-t} dt - \frac{t^2}{2} - C_2 t =$$

$$= \int (t + C_1)\, de^{-t} - \frac{t^2}{2} - C_2 t = (t + C_1) e^{-t} + e^{-t} - \frac{t^2}{2} - C_2 t + C_3$$

$$C = (t + C_1 + 1) e^{-t} - \frac{t^2}{2} - C_2 t + C_3$$

$$z = t + C_1 + 1 - \frac{t^2}{2} e^t - C_2 t e^t + C_3 e^t$$

$$\boxed{z = t + 1 - \frac{t^2}{2} e^t + C_1 - C_2 t e^t + C_3 e^t}$$

$$\boxed{y = x' - z - 1}$$

שאלה מס' 4. מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה:

$$yy'' = (y')^2 + y^2 x\sqrt{x+1}$$

$$y = C_1 e^{\int z(x)dx}$$

$$y' = C_1 e^{\int z dx} \cdot z$$

$$y'' = C_1 e^{\int z dx}(z^2 + z')$$

$$z^2 + z' = z^2 + x\sqrt{x+1}$$

$$z' = x\sqrt{x+1}$$

$$z = \int x\sqrt{x+1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int (t-1)t^{1/2}\,dt = \frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} + C_2 =$$

$$= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C_2$$

$$y = C_1 e^{\frac{4}{35}(x+1)^{7/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C_2 x}$$

שאלה מס' 5.

5א) (13 נק') השתמשו בהתמרת לפלס כדי לפתור את הבעיה הבאה:

$$\frac{dy}{dt}+\underbrace{\int_0^t \cos(t-x)\,y(x)\,dx}_{\downarrow \mathcal{L}}=\sin t,\qquad y(0)=2$$

$$sY-2+\overbrace{\frac{s}{s^2+1}\cdot Y}=\frac{1}{s^2+1}$$

$$Y=\frac{2s^2+3}{s(s^2+2)}=\frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+2}+\frac{3}{2}\,\frac{1}{s}$$

$$y=\frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}\,t)+\frac{3}{2}$$

5ב) פתרו את הבעיה הבאה בעזרת התמרת לפלס:

$$y'' + 4y = \delta(t-2) + \begin{cases} 0 & t \le \pi/2 \\ \sin t & t > \pi/2 \end{cases}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$s^2 Y - s + 4Y = e^{-2s} + F(s)$$

$$f(t) = u_{\frac{\pi}{2}}(t) \sin t = u_{\frac{\pi}{2}}(t) \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$F(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s} \frac{s}{s^2+4}$$

$$Y = \frac{s}{s^2+4} + e^{-\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}}_{\frac{1}{3}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4}\right)} + e^{-2s} \frac{1}{s^2+4}$$

$$y(t) = \cos 2t + \frac{1}{3} u_{\frac{\pi}{2}}(t) \left\{ \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \cos 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right\} + \frac{1}{2} u_2(t) \sin 2(t-2) =$$

$$= \cos 2t + \frac{1}{3} u_{\frac{\pi}{2}}(t) \left(\sin t - \cos 2t\right) + \frac{1}{2} u_2(t) \sin(2t-4)$$

טבלה: התמרת לפלס

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. $t^n; \quad n =$ positive integer	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. $t^p, \ p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$
9. $e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
10. $e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at}, \ n =$ positive integer	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$