אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 18.01.11
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
מבחן ב: מבוא למשוואות דיפרנציאליות
מס' הקורס 0201.1.9031
מועד א סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות אחד (משני צדדים),
מחשבון פשוט

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות (משקל של כל שאלה שווה ל-25 נקודות)
ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד.
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה.

בהצלחה!

שאלה מס' 1.

1א) (12 נק') מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה $xy'+1=e^y$

$$xy' = e^y - 1$$

1) $e^y - 1 = 0 \implies y \equiv 0$

2) $$\frac{dy}{e^y-1} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{e^y-1} = \int \frac{e^{-y}\,dy}{1-e^{-y}} = -\int \frac{de^{-y}}{1-e^{-y}} = \int \frac{de^{-y}}{e^{-y}-1} = \ln|e^{-y}-1| + c$$

$$\ln|e^{-y}-1| = \ln|x| + c$$

$$e^{-y} - 1 = cx \qquad c \neq 0$$

ניתן לאחד את המקרים 1) ו- 2):

תשובה

$$\boxed{e^{-y} - 1 = cx}$$

1ב) (13 נק') מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה

$$x^2y''-3xy'+4y=x^2\ln x \qquad (x>0)$$

משוואת אוילר

$$\lambda(\lambda-1)-3\lambda+4=0$$
$$\lambda^2-4\lambda+4=0$$
$$\lambda_1=\lambda_2=2$$

פתרון של מ. הומוגנית:

$$\tilde{y}=C_1x^2+C_2x^2\ln x \qquad (x>0).$$

שיטת הווריאציה:

$$y=C_1(x)x^2+C_2(x)x^2\ln x$$

$$\begin{cases} C_1'x^2+C_2'x^2\ln x=0 \\ C_1'2x+C_2'(2x\ln x+x)=\dfrac{x^2\ln x}{x^2} \end{cases}$$

$$C_1'=-C_2'\ln x$$

$$-\underline{2C_2'x\ln x}+\underline{C_2'(2x\ln x}+x)=\ln x$$

$$C_2'=\frac{\ln x}{x} \qquad C_1'=-\frac{\ln^2 x}{x}$$

$$C_1=-\int\frac{\ln^2x}{x}dx=-\int\ln^2x\,d\ln x=-\frac{\ln^3x}{3}+C_{10}$$

$$C_2=\int\frac{\ln x\,dx}{x}=\int\ln x\,d\ln x=\frac{\ln^2x}{2}+C_{20}$$

תשובה:

$$y=\left(-\frac{1}{3}\ln^3x+C_{10}\right)x^2+\left(\frac{\ln^2x}{2}+C_{20}\right)x^2\ln x$$

$$\boxed{y=\frac{1}{6}x^2\ln^3x+C_{10}x^2+C_{20}x^2\ln x}$$

שאלה מס' 2. פתרו את הבעיה הבאה

$$yy'' - (y')^2 = y^2 (y')^3, \quad y(1)=1, \quad y'(1)=1$$

$$p = \frac{dy}{dx} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$$

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^2 p^3$$ — מ. ברנולי'

1) $y=0$ 2) $p=0 \to y=C$ $\longrightarrow$ לא מקי"ם תנאי' ההתחלה

3) $$\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}\frac{1}{p} = y \qquad u = \frac{1}{p}, \quad \frac{du}{dy} = -\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dy}$$

$$-\frac{du}{dy} - \frac{1}{y}u = y \qquad \frac{du}{dy} + \frac{1}{y}u = -y$$

$$u = C(y)e^{-\int\frac{dy}{y}} = C(y)e^{-\ln|y|} = \frac{C(y)}{y}$$

$$\frac{C'(y)}{y} = -y \qquad C' = -y^2 \qquad C(y) = -\frac{y^3}{3} + C_1$$

$$u = \frac{1}{p} = \left(C_1 - \frac{y^3}{3}\right)\frac{1}{y} \qquad x=1 \to \begin{cases} y=1 \\ p=1 \end{cases}$$

$$1 = C_1 - \frac{1}{3} \qquad C_1 = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{4}{3y} - \frac{y^2}{3}$$

$$x = \frac{4}{3}\ln|y| - \frac{y^3}{9} + C_2$$

$$1 = \frac{4}{3}\ln 1 - \frac{1}{9} + C_2 \qquad C_2 = \frac{10}{9}$$

תשובה:

$$\underline{x = \frac{4}{3}\ln y - \frac{y^3}{9} + \frac{10}{9}}$$

שאלה מס' 3.

3א) (13 נק') מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה: $y^{(6)}+2y^{(3)}+4y=0$

$$r^6+2r^3+4=0 \Rightarrow r^3=-1\pm i\sqrt{3}=2\Big(\underbrace{-\tfrac{1}{2}}_{\cos\frac{2}{3}\pi}\pm i\underbrace{\tfrac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\frac{2}{3}\pi}\Big)$$

$$r^3=2e^{\pm\frac{2}{3}\pi i}$$

1. $r^3=2e^{\frac{2}{3}\pi i}$

$\varphi_1=\frac{2}{9}\pi$

$\varphi_2=\frac{2}{9}\pi+\frac{2\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$

$\varphi_3=\frac{2}{9}\pi+\frac{4\pi}{3}=\frac{14}{9}\pi$

$$r_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2}{9}\pi+i\sin\frac{2}{9}\pi\right)$$

$$r_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8}{9}\pi\right)=$$

$$=\sqrt[3]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$

$$r_3=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9}-i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$$

2. $r^3=2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

$$r_4=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2}{9}\pi-i\sin\frac{2}{9\pi}\right)$$

$$r_5=\sqrt[3]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{9}-i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$

$$r_6=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right).$$

$$y=e^{\left(\sqrt[3]{2}\cos\frac{2}{9}\pi\right)x}\cdot\left(C_1\cos\left(x\sqrt[3]{2}\sin\frac{2}{9}\pi\right)+C_2\sin\left(x\sqrt[3]{2}\sin\frac{2}{9}\pi\right)\right)+$$

$$+e^{-\left(\sqrt[3]{2}\cos\frac{\pi}{9}\right)x}\cdot\left(C_3\cos\left(x\sqrt[3]{2}\sin\frac{\pi}{9}\right)+C_4\sin\left(x\sqrt[3]{2}\sin\frac{\pi}{9}\right)\right)+$$

$$+e^{\left(\sqrt[3]{2}\cos\frac{4\pi}{9}\right)x}\cdot\left(C_5\cos\left(x\sqrt[3]{2}\sin\frac{4\pi}{9}\right)+C_6\sin\left(x\sqrt[3]{2}\sin\frac{4\pi}{9}\right)\right)$$

3ב) (12 נק') מצאו התמרת לפלס הפוכה לפונקציה $F(s)=\dfrac{s}{\left(s^2+9\right)^2}$

רמז: ניתן להשתמש בקונבולוציה.

$$L^{-1}[\Phi(s)\cdot\Psi(s)] = \varphi * \psi(t)$$

1. שימוש בקונבולוציה:

$$F = \frac{1}{3}\cdot\frac{s}{s^2+9}\cdot\frac{3}{s^2+9} \Longrightarrow$$

$$L^{-1}[F] = \frac{1}{3}\int_0^t \cos(3(t-y))\sin 3y\, dy =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^t \{\sin 3t + \sin(6y-3t)\}\, dy =$$

$$= \frac{1}{6} t\sin 3t + \frac{-1}{36}\cos(6y-3t)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{6} t\sin 3t - \frac{1}{36}\left[\cos(3t) - \cos(-3t)\right] = \frac{1}{6} t\sin 3t$$

2. פתרון שני:

$$L^{-1}[\Phi'(s)] = -t\varphi(t)$$

$$F(s) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+9} \Longrightarrow$$

$$L^{-1}[F] = +\frac{1}{2} t\, L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] = \frac{1}{6} t\sin 3t$$

שאלה מס' 4. מצאו פתרון כללי של מערכת

$$\begin{cases} x' = 5x - 2y + 6te^{3t} \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

$$y'' = 2\underbrace{(5x - 2y + 6te^{3t})}_{x'} + y'$$

$$x = \frac{y' - y}{2}$$

$$y'' = 5y' - 5y - 4y + 12te^{3t} + y'$$

$$y'' - 6y' + 9y = 12te^{3t}$$

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \qquad r_1 = r_2 = 3$$

$$y = \tilde{y} + \hat{y}$$

$$\tilde{y} = C_1 e^{3t} + C_2 te^{3t}$$

$$\hat{y} = t^2 e^{3t}(At + B) = (At^3 + Bt^2)e^{3t}$$

$$\hat{y}' = (3At^2 + 2Bt + 3At^3 + 3Bt^2)e^{3t}$$

$$\hat{y}'' = (6At + 2B + 9At^2 + 6Bt + 9At^2 + 6Bt + 9At^3 + 9Bt^2)e^{3t}$$

$$\left.\begin{array}{l|l} t^3 & 9A - 6\cdot 3A + 9A = 0 \\ t^2 & 9A + 9A + 9B - 18A - 18B + 9B = 0 \\ t^1 & 6A + 6B + 6B - 12B = 12 \\ 1 & 2B = 0 \end{array}\right\} \qquad A = 2, \ B = 0$$

$$\hat{y} = 2t^3 e^{3t}$$

<u>תשובה:</u>

$$\begin{cases} y = C_1 e^{3t} + C_2 te^{3t} + 2t^3 e^{3t} \\ x = \dfrac{y' - y}{2} \end{cases}$$

שאלה מס' 5. פתרו את הבעיה הבאה בעזרת התמרת לפלס:

$$y''-6y'+9y=\begin{cases} e^t & 1\le t\le 2 \\ 0 & t\notin[1,2] \end{cases} = g(t)$$

$$y(0)=1, \quad y'(0)=2.$$

$$g(t)=[u_1(t)-u_2(t)]e^t = e^1\cdot u_1(t)e^{t-1}-e^2u_2(t)e^{t-2}$$

$$G(s)=e\frac{e^{-s}}{s-1}-e^2\frac{e^{-2s}}{s-1}$$

$$(s^2-6s+9)Y-1s-2+6=G(s)$$

$$Y(s)=\frac{s-4}{(s-3)^2}+e\frac{e^{-s}}{(s-1)(s-3)^2}-e^2\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)^2}$$

$$Y_1=\frac{s-4}{(s-3)^2}=\frac{s-3}{(s-3)^2}-\frac{1}{(s-3)^2}=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{(s-3)^2}$$

$$y_1=\mathcal{L}^{-1}(Y_1)=e^{3t}-te^{3t}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s-3)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-3}+\frac{C}{(s-3)^2} \Rightarrow A(s-3)^2+B(s-1)(s-3)+C(s-1)=1$$

$$s=3 \to 2C=1, \quad C=1/2$$

$$s=1 \to 4A=1, \quad A=1/4$$

$$s=0 \to \frac{9}{4}+3B-\frac{1}{2}=1 \quad B=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$Y_2=e\frac{e^{-s}}{(s-1)(s-3)^2}=e\left[\frac{1}{4}\frac{e^{-s}}{s-1}-\frac{1}{4}\frac{e^{-s}}{s-3}+\frac{1}{2}\frac{e^{-s}}{(s-3)^2}\right]$$

$$y_2(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y_2)=e\,u_1(t)\left[\frac{1}{4}e^{t-1}-\frac{1}{4}e^{3(t-1)}+\frac{1}{2}(t-1)e^{3(t-1)}\right]$$

$$Y_3=e^2\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)^2}$$

$$y_3(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y_3)=e^2u_2(t)\left[\frac{1}{4}e^{t-2}-\frac{1}{4}e^{3(t-2)}+\frac{1}{2}(t-2)e^{3(t-2)}\right]$$

$$\underline{y(t)=y_1(t)+y_2(t)-y_3(t)}$$

טבלה: התמרת לפלס

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s>0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s>a$
3. t^n; $n=$ positive integer	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s>0$
4. $t^p, \; p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s>0$
5. $\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s>0$
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s>0$
7. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s>\lvert a\rvert$
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s>\lvert a\rvert$
9. $e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s>a$
10. $e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s>a$
11. $t^n e^{at}$, $n=$ positive integer	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s>a$
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s>0$
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c>0$
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$