



אוניברסיטת בן גוריון בנגב

תאריך הבוחן 14.05.10

מדור בחינות

מרצה: פרופ' ל. פריגוזין

בוחן ב: מבוא למשוואות דיפרנציאליות א

מס' הקורס 0201.1.9031 סמ' א

משך הבחינה- 2 שעות

חומר עזר: דף נוסחאות אחד

יש לפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד (כל שאלה שווה ל- 25 נקודות)
לטייטה השתמשו במחברת המצורפת לשאלון זה.

בהצלחה !

שאלה מס' 1. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$y' = 2 \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2$$

$$\begin{cases} y+2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_0 = 3 \\ y_0 = -2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} X = x-3 \\ Y = y+2 \end{matrix}$$

$$\frac{dY}{dX} = 2 \left(\frac{Y}{X+Y} \right)^2$$

$$Y = z(X)X$$

$$z + X \frac{dz}{dX} = 2 \left(\frac{z}{1+z} \right)^2$$

$$X \frac{dz}{dX} = \frac{2z^2 - z - 2z^2 - z^3}{(1+z)^2}$$

$$X \frac{dz}{dX} = - \frac{z(1+z^2)}{(1+z)^2}$$

$$1) z=0 \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

$$2) \frac{(1+z)^2}{z(1+z^2)} dz = - \frac{dX}{X} \Rightarrow \frac{dz}{z} + \frac{2dz}{1+z^2} = - \frac{dX}{X}$$

$$\ln |z| + 2 \arctg z = - \ln |x| + C$$

$$\ln |Y| + 2 \arctg \frac{Y}{X} = C$$

$$\boxed{\ln |y+2| + 2 \arctg \frac{y+2}{x-3} = C}$$

$$y = -2$$

שאלה מס' 2. פתרו את הבעיה הבאה ~~עם הנאי המסלול~~:

$$x dy = (2x^2 \sqrt{y} - 4y) dx,$$

$$~~y(0) = 1.~~$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4y}{x} = 2x \sqrt{y}$$

$$\boxed{y=0}$$
$$\boxed{x=0}$$

$$y^{-1/2} y' + \frac{4}{x} y^{1/2} = 2x$$

$$2z' + \frac{4}{x} z = 2x$$

$$z' + \frac{2}{x} z = x$$

$$z = c(x) e^{-\int \frac{2}{x} dx} = c(x) \frac{1}{x^2}$$

$$c' \frac{1}{x^2} = x \quad c' = x^3$$

$$c(x) = \frac{x^4}{4} + C_0$$

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{C_0}{x^2}$$

$$\boxed{y^{1/2} = \frac{x^2}{4} + \frac{C_0}{x^2}}$$

$$\boxed{y=0 \quad x=0}$$

שאלה מס' 3. רשמו ביטוי לפתרון הכללי לכל אחת מהמשוואות הבאות (אין צורך לחשב מקדמים)

$$y'' - 2y' + 2y = e^x + x \cos x \quad (א)$$

$$y'' - 8y' + 17y = e^{4x} (x^2 - 3x \sin x) \quad (ב)$$

$$y'' + 3y' + 2y = e^{2x} \sin^2 x \quad (ג)$$

פתרון כללי של המשוואה

הצגה

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + A e^x + (Bx + C) \cos x + (Dx + E) \sin x \quad (1)$$

$$y = C_1 e^{4x} \cos x + C_2 e^{4x} \sin x + (Ax^2 + Bx + C) e^{4x} + x e^{4x} [(A_1 x + B_1) \cos x + (C_1 x + D_1) \sin x] \quad (2)$$

$$f = e^{2x} \sin^2 x = e^{2x} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \Rightarrow$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + A e^{2x} + e^{2x} (B \cos 2x + C \sin 2x) \cdot x + \quad (d)$$

שאלה מס' 4. מצאו את הפתרון הכללי של משוואה

$$(x^2 \ln x) y'' - xy' + y = 0$$

$$p = \frac{-1}{x \ln x}$$

כאשר פתרון אחד נתון: $y_1 = x$.

$$y = C_1 \int \frac{e^{+\int \frac{dx}{x \ln x}}}{x^2} dx + C_2 x =$$

$$= C_1 x \int \frac{e^{\ln |\ln x|}}{x^2} dx + C_2 x$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} = \int \ln x d\left(-\frac{1}{x}\right) =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = \underline{-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}}$$

$$y = C_1 (\ln x + 1) + C_2 x$$