

משוואות חום

מצא פתרונות לבעיית הבאות:

$u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$ **1**

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$$

$u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$ **2**

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$u_t = u_{xx} + u_x, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$ **3**

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$u_t = u_{xx} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$ **4**

$$u(x,0) = x^2$$

רמז: פונקציה $v = u_{xxx}$ מקיימת אותה משוואה ותנאי ההתחלה $v(x,0) = 0$ או $v(x,t) = 0$ -
 $u = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$. מצאו את המקדמים A, B, C .

5 השתמשו בשיטת האנרגיה כדי להוכיח יחידות של פתרון לבעיה

$$u_t = au_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$u_x(0,t) = \varphi_1(t), \quad u_x(l,t) = \varphi_2(t), \quad t > 0$$

$$u(x,0) = g(x), \quad 0 < x < l$$

תשובות

1. $u(x,t) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2}$
2. $u(x,t) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{1+x}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right) \right)$
3. $\frac{1}{2} e^{\frac{2x+t}{4}} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{1-x-t}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-1-x-t}{2\sqrt{t}}\right) \right)$
4. $u(x,t) = x^2 + 2tx + t^2$