משוואות חום (המשך)

1.1 $u(x,t)$ **הוא פתרון לבעיה:** $-\infty < x < \infty,\ t > 0$, $u_t = 2u_{xx}$, $u(x,0) = e^{-x^2}$

חשב: $M_4(5) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot u(x,5)\ dx$

1.2 $u_1(x,t)$ **ו-** $u_2(x,t)$ **הם פתרונות לבעיות הבאות:** $-\infty < x < \infty,\ t > 0$

$$f(x) = \begin{cases} 3, & |x| < 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} v_t + v_x = v_{xx} \\ v(x,0) = f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l} u_t + 0.5u = u_{xx} \\ v(x,0) = f(x) \end{array}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(0,t)}{v(0,t)} = ?$$

1.3 $u(x,t)$ **ו-** $v(x,t)$ **הם פתרונות לבעיות הבאות:** $-\infty < x < \infty,\ t > 0$

$$\begin{array}{l} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = e^{-|x|} \end{array} \qquad \begin{array}{l} v_t = v_{xx} \\ v(x,0) = x \cdot e^{-x^2} \end{array}$$

חשב: $\lim_{t\to\infty} \frac{v(1,t)}{u(1,t)}$

2.1 מצא פתרון לבעיה: $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \infty,\ t > 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} -1, & 0 < x \le 2 \\ 1, & 2 < x \le 3, \\ 0, & x > 3 \end{cases} \qquad u(0,t) = 0$$

2.2 $u(x,t)$ **הוא פתרון לבעיה:** $u_t = 3u_{xx}, \quad 0 < x < \infty,\ t > 0$

$$u(x,0) = e^{-x^2}, \qquad u(0,t) = 0$$

חשב: $M_1(1) = \int_0^{\infty} x \cdot u(x,1)\ dx$

2.3 $u(x,t)$ **הוא פתרון לבעיה:** $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \infty,\ t > 0$

$$u(x,0) = x \cdot e^{-x^2}, \qquad u(0,t) = 0$$

נגדיר $M_3(t) = \int_0^{\infty} x^3 \cdot u(x,t)\ dx$. $M_3(10) = ?$

תשובות

1.1 $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 u(x,5)dx = M_4(5) = 1260.75\sqrt{\pi}$

1.2 $\lim_{t\to\infty} \frac{u(0,t)}{v(0,t)} = 0$

1.3 $\lim_{t\to\infty} \frac{v(1,t)}{u(1,t)} = 0$

2.1 $u(x,t) = erf\left(\frac{x+2}{2\sqrt{t}}\right) - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + erf\left(\frac{x-2}{2\sqrt{t}}\right) - 0.5erf\left(\frac{x+3}{2\sqrt{t}}\right) - 0.5\left(\frac{x-3}{2\sqrt{t}}\right)$

2.2 $\int_{0}^{\infty} xu(x,1)dx = \frac{1}{2}$

2.3 $M_3(10) = 15.375\sqrt{\pi}$