אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה: 08.02.12
שם המרצה: פרופ' ל. פריגוזין
שם הקורס: **מבוא למשוואות דיפרנציאליות להנדסת חומרים**
מס' הקורס: 0201.1.9171
שנה: 2011 סמסטר: א' מועד: א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות (משני צדדים), מחשבון עם צג קטן

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות (משקל של כל שאלה שווה ל-25 נקודות)
ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד.
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).

בהצלחה!

שאלה 1. מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה: $y^{(4)}+2y^{(2)}+2y=\sin\left(\frac{3}{8}\pi x\right)$

$$r^4+2r^2+2=0 \Rightarrow r^2=-1\pm i=\sqrt{2}\,e^{\pm i\frac{3}{4}\pi}$$

$$r_1=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{3}{8}\pi i} \qquad r_2=\sqrt[4]{2}\,e^{\left(\frac{3}{8}\pi+\pi\right)i}=-\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{3}{8}\pi i}$$

$$r_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{3}{8}\pi+i\sin\tfrac{3}{8}\pi\right) \qquad r_2=-\sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{3}{8}\pi+i\sin\tfrac{3}{8}\pi\right).$$

$$r_3=\overline{r_1}\,, \qquad r_4=\overline{r_2}$$

נסמן: $\underline{C=\sqrt[4]{2}\cos\frac{3}{8}\pi\,,\quad S=\sqrt[4]{2}\sin\frac{3}{8}\pi}$

פתרון כלל' של משוואה הומוג'ת:

$$\tilde{y}=C_1e^{cx}\cos(Sx)+C_2e^{cx}\sin(Sx)+C_3e^{-cx}\cos(Sx)+C_4e^{-cx}\sin(Sx)$$

פתרון פרט' של משוואה ס' - הומוג'ת:

$$\hat{y}=A\cos\left(\tfrac{3}{8}\pi x\right)+B\sin\left(\tfrac{3}{8}\pi x\right)$$

$$\left[\tfrac{3}{8}\pi\right]^4\left(A\cos\tfrac{3}{8}\pi x+B\sin\tfrac{3}{8}\pi x\right)-2\left(\tfrac{3}{8}\pi\right)^2\left(A\cos\tfrac{3}{8}\pi x+B\sin\tfrac{3}{8}\pi x\right)+2\left(A\cos\tfrac{3}{8}\pi x+B\sin\tfrac{3}{8}\pi x\right)$$
$$=\sin\tfrac{3}{8}\pi x$$

$$B=0 \qquad A=\frac{1}{\left(\frac{3}{8}\pi\right)^4-2\left(\frac{3}{8}\pi\right)^2+2}$$

$$\underline{\hat{y}=A\cos\tfrac{3}{8}\pi x}$$

תשובה סופית:

$$y=\hat{y}+\tilde{y}$$

שאלה 2. פתרו את הבעייה הבאה:

$$y\left(xy''+y'\right)=x\left(y'\right)^2, \qquad y(1)=1, \qquad y'(1)=1$$

$$\underline{y=C_1 e^{\int z\,dx}} \qquad y'=C_1 e^{\int z\,dx}\cdot z$$

$$y''=C_1 e^{\int z\,dx}\left(z^2+z'\right)$$

$$\left[C_1 e^{\int z\,dx}\right]^2\cdot\left[x\left(z^2+z'\right)+z-xz^2\right]=0$$

$$xz'+z=0$$

$$z'+\frac{1}{x}z=0$$

$$z=C_2 e^{-\int\frac{dx}{x}}=\frac{C_2}{x}$$

$$y=C_1 e^{\int z\,dx}=C_1 e^{C_2\ln|x|}$$

$$y(1)=1=C_1$$

$$y'(1)=C_1 e^{C_2\ln(x)}\left.\frac{C_2}{x}\right|_{x=1}=C_1\cdot C_2=1$$

לפי תנאי ההתחלה $x>0$
מחפשים פתרון
בתחום $x>0$

$$C_2=1.$$

$$y=e^{\ln x}=\underline{\underline{x}}$$

תשובה: $\underline{y=x}$

שאלה 3.

א) (12 נק') מצאו פתרון כללי של מערכת

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y + t^{3/2}e^{t} \end{cases}$$

$$x'' = 3x' - 2y' = 3x' - 4x + 2y - 2t^{3/2}e^{t}$$

$$\boxed{y = \frac{3x - x'}{2}}$$

$$x'' = 3x' - 4x + 3x - x' - 2t^{3/2}e^{t}$$

$$x'' - 2x' + x = -2t^{3/2}e^{t}$$

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \qquad r_1 = r_2 = 1$$

פתרון כללי של מ. הומוגנית:

$$\tilde{x} = C_1 e^{t} + C_2 t e^{t}$$

וריאציה של פרמטרים:

$$x = C_1(t)e^{t} + C_2(t)te^{t}$$

$$\begin{cases} C_1' e^{t} + C_2' t e^{t} = 0 \\ C_1' e^{t} + C_2'(t+1)e^{t} = -2t^{3/2}e^{t} \end{cases}$$

$$C_2' = -2t^{3/2} \qquad C_2 = -\frac{4}{5}t^{5/2} + C_{20}$$

$$C_1' = -C_2' t = 2t^{5/2} \qquad C_1 = \frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}} + C_{10}$$

גשובנו:

$$x = \left(\frac{4}{7}t^{7/2} + C_{10}\right)e^{t} + \left(-\frac{4}{5}t^{7/2} + C_{20}t\right)e^{t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -\frac{8}{35}t^{7/2}e^{t} + C_{10}e^{t} + C_{20}te^{t} \\ y &= \frac{3x - x'}{2} \end{aligned}}$$

ב) (13 נק') מצאו טור פורייה של קוסינוסים שמתכנס בקטע $(0,2)$ לפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x<1\\ 0 & 1<x<2\end{cases}$$

לאיזו פונקציה מתכנס הטור בקטע סגור $[2,4]$? האם ניתן לבנות טור פורייה של קוסינוסים <u>אחר</u> שבקטע $(0,2)$ מתכנס לאותה פונקציה f? הסבירו!

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3} \qquad \underline{l=2}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^1 x^2\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x^2 d\left(\sin\frac{\pi nx}{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^1-2\int_0^1 x\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right]=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\, d\left(\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\right]=$$

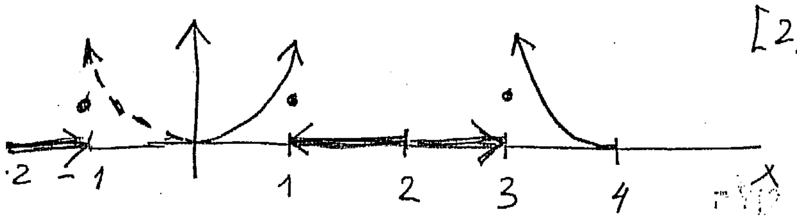
$$=\frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{4}{n\pi}\left(x\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^1-\int_0^1\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{4}{n\pi}\cos\frac{\pi n}{2}-\frac{8}{(n\pi)^2}\sin\frac{\pi n}{2}\right]=$$

$$=\underline{\frac{2}{n\pi}\left(1-\frac{8}{(n\pi)^2}\right)\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{8}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi}{2}}$$

$$\underline{S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2}}$$

$S(x)$ פונקציה זוגית בעלת מחזור 4.
הטור מתכנס בקטע $[2,4]$ לפונקציה הבאה:



$$S(x)=\begin{cases}0 & 2\le x<3\\ \frac{1}{2} & x=3\\ (x-4)^2 & 3<x\le 4\end{cases}$$

לפי משפט Dirichlet

ניתן להמשיך פונקציה f לקטע גדול יותר, למשל $(0,3)$ באופן שרירותי (צריכה להיות פונקציה רציפה למקוטעין עם נגזרת רציפה למקוטעין) ולבנות טור פורייה של cos בשבילה.

שאלה 4. פתרו את הבעיה הבאה:

$$u_t = 2u_{xx} - 2u + x + \cos t + 2\sin t, \quad 0 < x < \pi, t > 0$$
$$u(0,t) = \sin t, \quad u_x(\pi,t) = 1,$$
$$u(x,0) = x + 4\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$$

1. $u = v + Ax + B$ $\quad x=0)\ B = \sin t \quad x=\pi)\ A = 1 \quad \Rightarrow \underline{u = v + x + \sin t}$

$$\cos t + v_t = 2v_{xx} - 2v - 2x - 2\sin t + x + \cos t + 2\sin t$$

$$\begin{cases} v_t = 2v_{xx} - 2v - x \\ v(0,t) = v_x(\pi,t) = 0 \\ v(x,0) = 4\sin\frac{3}{2}x \end{cases}$$

2. $v = e^{-2t} w \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} w_t = 2w_{xx} - xe^{2t} \\ w(0,t) = w_x(\pi,t) = 0 \\ w(x,0) = 4\sin\frac{3}{2}x \end{cases}$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$$

$$x_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{2n+1}\right)\int_0^{\pi} x\, d\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi(2n+1)}\left[x\cos\frac{2n+1}{2}x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx\right] =$$

$$= -\frac{4}{\pi(2n+1)}\left[\pi\underbrace{\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi}_{=0} - \frac{2}{2n+1}\sin\frac{2n+1}{2}\pi\right] = \frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}$$

$$\begin{cases} w_n' + 2\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 w_n = -x_n e^{2t} \\ w_n(0) = \begin{cases} 4 & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases} \end{cases} \qquad \sigma_n = \frac{2n+1}{2} \quad /NOJ$$

$$w_n = C_n e^{-2\sigma_n^2 t} + A_n e^{2t}$$

$$2A_n + 2\sigma_n^2 A_n = -x_n \qquad A_n = -\frac{x_n}{2(1+\sigma_n^2)}$$

$$C_n + A_n = \begin{cases} 4 & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases} \Rightarrow C_n = \begin{cases} 4 - A_1 & n=1 \\ -A_n & n\neq 1 \end{cases}$$

תשובה:

$$u = e^{-2t} w + x + \sin t$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} x\right)$$

$$w_n(t) = C_n e^{-2\sigma_n^2 t} + A_n e^{2t}$$

$$\sigma_n = \frac{2n+1}{2} \qquad A_n = -\frac{x_n}{2(1+\sigma_n^2)}$$

$$x_n = \frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)^2} \qquad C_n = \begin{cases} 4 - A_1 & n = 1 \\ -A_n & n \neq 1 \end{cases}$$

שאלה 5. נתונה בעייה על חצי ציר

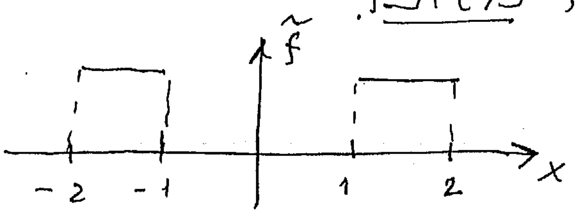
$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} - u, & 0<x<\infty,\ t>0, \\ u_x(0,t)=0, & u(x,0)=\begin{cases}1 & x\in[1,2]\\ 0 & x\notin[1,2]\end{cases}\end{cases}$$

א) (15 נק') פתרו את הבעיה.

$$u = ve^{-t}$$

(1)
$$\begin{cases} v_t = 4v_{xx} \\ v_x(0,t)=0 \\ v(x,0)=f=\begin{cases}1 & x\in[1,2]\\ 0 & x\in[1,2].\end{cases}\end{cases}$$

(2) נמשיך $f(x)$ לכל ציר כפונקציה זוגית $\tilde f$!
ונפתור בע"ה על כל ציר:



$$\begin{cases} \tilde v_t = 4\tilde v_{xx} & -\infty<x<\infty,\ t>0 \\ \tilde v(x,0)=\tilde f(x). \end{cases}$$

$$\tilde f(x) = \theta(x+2)-\theta(x+1)+\theta(x-1)-\theta(x-2)$$

כאשר θ - פונקצית מדרגה , OK

$$\tilde v(x,t) = \frac12\left(1+\operatorname{erf}\left(\frac{x+2}{\sqrt{16t}}\right)\right)-\frac12\left(1+\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{\sqrt{16t}}\right)\right)+\frac12\left(1+\operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{\sqrt{16t}}\right)\right)-$$
$$-\frac12\left(1+\operatorname{erf}\left(\frac{x-2}{\sqrt{16t}}\right)\right)$$

$$\tilde v = \frac12\left(\operatorname{erf}\frac{x+2}{4\sqrt t}-\operatorname{erf}\frac{x+1}{4\sqrt t}+\operatorname{erf}\frac{x-1}{4\sqrt t}-\operatorname{erf}\frac{x-2}{4\sqrt t}\right)$$

בתחום $x>0$ $v(x,t)=\tilde v(x,t)$ כי פונקציה $\tilde v$
מקיימת משוואת חום ו- $\tilde v_x(0,t)=0$.

S/C

$$u(x,t) = \frac{e^{-t}}{2}\left[\operatorname{erf}\frac{x+2}{4\sqrt t}-\operatorname{erf}\frac{x+1}{4\sqrt t}+\operatorname{erf}\frac{x-1}{4\sqrt t}-\operatorname{erf}\frac{x-2}{4\sqrt t}\right]$$

ב) נגדיר מומנט משדר n של פתרון כאינטגרל $M_n(t)=\int_0^\infty x^n u(x,t)dx$

ומרכז המסה כיחס $\hat{x}=\frac{M_1}{M_0}$. מצאו את המומנטים M_0 ו- M_2. (10 נק')

האם מרכז המסה משתנה עם הזמן? אם כן, באיזה כיוון הוא זז ? מצאו סימן של $\frac{d\hat{x}}{dt}$

(5 נק' בונוס).

<u>הסבירו את תשובתכם.</u>

$$M_n^u=e^{-t}M_n^v$$

יהי $u(x,t)$ פתרון מסעיף (א). אז

$$\frac{d}{dt}M_0^v=\int_0^\infty v_t\,dx=4\int_0^\infty v_{xx}\,dx=4v_x\Big|_0^\infty=0.$$

$$\frac{d}{dt}M_2^v=\int_0^\infty x^2v_t\,dx=4\int_0^\infty x^2v_{xx}\,dx=$$

$$=4\Big(\underbrace{x^2v_x\Big|_0^\infty}_{=0}-2\int_0^\infty xv_x\,dx\Big)=-8\int xv_x\,dx=$$

$$=-8\Big[\underbrace{xv\Big|_0^\infty}_{=0}-\int_0^\infty v\,dx\Big]=8M_0^v$$

$$M_0^v(t)\equiv M_0^v(0)=\int_0^\infty f(x)dx=\int_1^2 1\,dx=1$$

$$M_2^v(t)=8M_0^vt+M_2^v(0)=8t+\int_1^2x^2dx=$$

$$=8t+\frac{7}{3}$$

אז: $\boxed{M_0^u(t)=e^{-t}\ ,\quad M_2^u(t)=e^{-t}\left(8t+\frac{7}{3}\right)}$

$$\hat{x}=\frac{M_1^u}{M_0^u}=\frac{M_1^v}{M_0^v}\Rightarrow\frac{d\hat{x}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{M_1^v(t)}{M_0^v}\right)=\frac{1}{M_0^v}\frac{dM_1^v}{dt}(t).$$

$$\frac{dM_1^v}{dt}=4\int_0^\infty xv_{xx}\,dx=4\Big[xv_x\Big|_0^\infty-\int_0^\infty v_x\,dx\Big]=+4v(0,t).$$

בגלל ש- $\tilde{v}(x,0)\geq 0$ בכל ציר x, $\tilde{v}(x,t)>0$ עבור כל $x,t>0$

אז $v(0,t)=\tilde{v}(0,t)>0$ כאשר $t>0$.

קיבלנו ש. $\frac{dM_1^v}{dt}>0$ ואז $M_1^v(t)$ מונוטונית עולה.

בגלל ש $M_0^v=\text{const}>0$ מקבלים ש- $\hat{x}(t)$ זז לכיוון חיובי של ציר x