אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 9.02.11
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
מבחן ב: <u>מבוא למשוואות דיפרנציאליות להנדסת חומרים</u>
מס' הקורס 0201.1.9171
מועד ב סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות (משני צדדים), מחשבון פשוט

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות (משקל של כל שאלה שווה ל-25 נקודות)
ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד.
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).

בהצלחה!

שאלה מס' 1. פתרו בעיית תנאי התחלה

$$dy\left(2x^3 y\ln y - x\right) = ydx, \quad y(1)=1$$

1. $dy=0 \to y=c \to \begin{cases} y=0 \longrightarrow \\ dx \neq 0 \longrightarrow \end{cases}$ אינם פתרונות

2. $y\dfrac{dx}{dy} = 2x^3 \ln y - x$ <u>משוואת ברנולי</u>

$x \equiv 0 \longrightarrow$ לא מקיים תנאי התחלה

$$x^{-3}\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x^{-2} = 2\ln y \qquad v = x^{-2} \quad \frac{dv}{dy} = -2x^{-3}\frac{dx}{dy}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dy} + \frac{v}{y} = 2\ln y \longrightarrow \frac{dv}{dy} - \frac{2}{y}v = -4\ln y$$

$$v = C(y)\, e^{\int \frac{2}{y}dy} = C(y)y^2$$

$$C'(y)y^2 = -4\ln y \to C' = -\frac{4}{y^2}\ln y$$

$$C(y) = 4\int \ln y \, d\left(\frac{1}{y}\right) = 4\left(\frac{\ln y}{y} - \int\frac{dy}{y^2}\right) = 4\left(\frac{\ln y}{y} + \frac{1}{y}\right) + C_0$$

$$x^{-2} = \left[\frac{4}{y}(\ln y + 1) + C_0\right]y^2 = 4y(\ln y + 1) + C_0 y^2$$

$$y(1) = 1 \to \quad 1 = 4 + C_0 \qquad C_0 = -3$$

$$\boxed{\frac{1}{x^2} = 4y(\ln y + 1) - 3y^2}$$

שאלה מס' 2.

2א) (12 נק') מצאו פתרון כללי של המשוואה האי-הומוגנית הבאה

$$y'' - (2-\tan x)y' + (1-\tan x)y = e^x \cos x$$

כאשר נתון פתרון פרטי אחד, $y_1 = e^x$, של משוואה הומוגנית.

פתרון כלל של מ. הומוג'נית:

$$\tilde{y} = C_1 e^x \int \frac{e^{\int (2-tgx)dx}}{e^{2x}} dx + C_2 e^x =$$

$$= C_1 e^x \int \frac{e^{2x + \int \frac{d\cos x}{\cos x}}}{e^{2x}} dx + C_2 e^x =$$

$$= C_1 e^x \int \cos x \, dx + C_2 e^x = C_1 e^x \sin x + C_2 e^x$$

וריאצ'" של פרמטרים שרירות"ם:

$$\begin{cases} C_1' e^x \sin x + C_2' e^x = 0 \\ C_1' e^x (\sin x + \cos x) + C_2' e^x = e^x \cos x \end{cases}$$

$C_1' = 1 \qquad C_1 = x + C_{10}$

$C_2' = -C_1' \sin x = -\sin x \qquad C_2 = \cos x + C_{20}$

$$\underline{y = (x \sin x + \cos x)e^x + C_{10} e^x \sin x + C_{20} e^x}$$

2ב) (13 נק') מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה:

$$y^{(4)}+4y=xe^{x}+\cos 3x+2\sin 3x$$

$z^4+4=0 \qquad z^4=4e^{i\pi}$

$|z|=\sqrt{2}$

$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i$

$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=-1+i$

$z_3=\bar{z}_1=1-i$

$z_4=\bar{z}_2=-1-i$

$\tilde{y}=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^{x}+(C_3\cos x+C_4\sin x)e^{-x}$

$f_1=xe^{x} \longrightarrow \hat{y}_1=(Ax+B)e^{x}$

$y_1'=(Ax+B+A)e^{x} \qquad y_1''=(Ax+B+2A)e^{x} \qquad y_1'''=(Ax+B+3A)e^{x}$

$y_1^{(4)}=(Ax+B+4A)e^{x}$

$Ax+B+4A+4Ax+4B=x$

$5A=1 \qquad 5B+4A=0 \implies A=\frac{1}{5} \qquad B=-\frac{4}{25}$

$\hat{y}_1=\frac{1}{5}\left(x-\frac{4}{5}\right)e^{x}$

$f_2=\cos 3x+2\sin 3x \longrightarrow \hat{y}_2=C\cos 3x+D\sin 3x$

$\hat{y}_2^{(4)}=3^4(C\cos 3x+D\sin 3x)$

$(3^4+4)C\cos 3x+(3^4+4)D\sin 3x=\cos 3x+2\sin 3x$

$C=\frac{1}{85} \qquad D=\frac{2}{85}$

$\hat{y}_2=\frac{1}{85}(\cos 3x+2\sin 3x)$

$$\boxed{y=\tilde{y}+\hat{y}_1+\hat{y}_2}$$

שאלה מס' 3. מצאו פתרון כללי של מערכת

$$\begin{cases} x' = y + z + 1 \\ y' = x + y + e^t \\ z' = z - x \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x'' = y' + z' = x + y + e^t + z - x = y + z + e^t \\ x' = y + z + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x'' - x' = e^t - 1$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \qquad \lambda = 0, 1$$

$$\tilde{x} = c_1 + c_2 e^t$$

$$\hat{x} = Bt + Ate^t$$

$$B = +1$$

$$A = 1$$

$$\boxed{x = c_1 + c_2 e^t + t + te^t}$$

$$z' - z = -x = -t - te^t - c_1 - c_2 e^t$$

$$z = c(t) e^t$$

$$c' e^t = -t - te^t - c_1 - c_2 e^t$$

$$c' = -te^{-t} - t - c_1 e^{-t} - c_2$$

$$c = \int (-t - c_1) e^{-t} dt - \frac{t^2}{2} - c_2 t =$$

$$= \int (t + c_1) de^{-t} - \frac{t^2}{2} - c_2 t = (t + c_1) e^{-t} + e^{-t} - \frac{t^2}{2} - c_2 t + c_3$$

$$c = (t + c_1 + 1) e^{-t} - \frac{t^2}{2} - c_2 t + c_3$$

$$z = t + c_1 + 1 - \frac{t^2}{2} e^t - c_2 te^t + c_3 e^t$$

$$\boxed{z = t + 1 - \frac{t^2}{2} e^t + c_1 - c_2 te^t + c_3 e^t}$$

$$\boxed{y = x' - z - 1}$$

שאלה מס' 4.

מצאו פתרון $u(x,t)$ לבעיה הבאה על חצי-ציר (**12 נק'**)

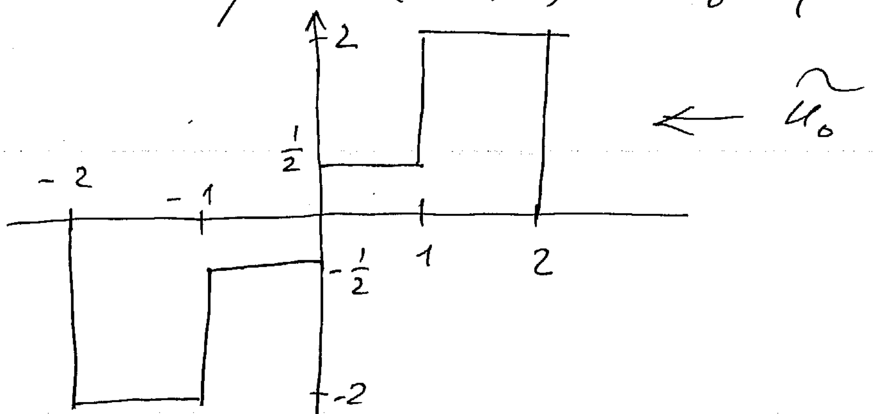
$$\begin{cases} u_t = a u_{xx}, & 0 < x < \infty,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & u(x,0) = \begin{cases} 0.5 & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 \le x \le 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases} = u_0(x) \end{cases}$$

מומנט מסדר n של פתרון מוגדר כאינטגרל $M_n(t) = \int_0^\infty x^n u(x,t)\,dx$.

הוכיחו כי $\frac{dM_2}{dt} = 2aM_0$ (**6 נק'**)

האם M_0 משתנה עם הזמן? אם כן, האם $M_0(t)$ פונקציה מונוטונית ? הסבירו! (**7 נק'**).

(1) נמשיך $u_0(x)$ ל- $(-\infty, 0)$ כפונקציה אי-זוגית:



$$\tilde{u}_0 = -2\theta(x+2) + \frac{3}{2}\theta(x+1) + \theta(x) + \frac{3}{2}\theta(x-1) - 2\theta(x-2).$$

פתרון של בע"ת קושי מקיים המשוואה ואת תנאי שפה ב- $x=0$:

$$u = -\frac{2}{2}\left(1+\operatorname{erf}\frac{x+2}{2\sqrt{at}}\right) + \frac{3}{4}\left(1+\operatorname{erf}\frac{x+1}{2\sqrt{at}}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \frac{3}{4}\left(1+\operatorname{erf}\frac{x-1}{2\sqrt{at}}\right) - \frac{2}{2}\left(1+\operatorname{erf}\frac{x-2}{2\sqrt{at}}\right) =$$

$$= -\operatorname{erf}\frac{x+2}{2\sqrt{at}} + \frac{3}{4}\operatorname{erf}\frac{x+1}{2\sqrt{at}} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{at}} + \frac{3}{4}\operatorname{erf}\frac{x-1}{2\sqrt{at}} - \operatorname{erf}\frac{x-2}{2\sqrt{at}}$$

(2)

$$\frac{dM_2}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^\infty x^2 u\,dx = \int_0^\infty x^2 \frac{\partial u}{\partial t}dx = a\int_0^\infty x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx = a\left(\overbrace{x^2\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^\infty}^{0} - 2\int x\frac{\partial u}{\partial x}dx\right) =$$

$$= -2a\left(\overbrace{xu\Big|_0^\infty}^{0} - \int_0^\infty u\,dx\right) = 2aM_0$$

(3)

$$\frac{dM_0}{dt} = \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t}dx = a\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx = \underbrace{-a\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)}_{\text{שטף חום}}. \quad < 0$$

חום עובר ממקום חם למקום קר; הכיוון הפוך לכיוון של ציר x.

שאלה מס' 5. פתרו את הבעיה הבאה:

$$u_t = 3u_{xx} + x^2\cos t, \qquad 0<x<1,\ t>0$$
$$u_x(0,t)=1, \quad u_x(1,t)=2\sin t+1,$$
$$u(x,0)=1$$

$u = U_0(x,t) + v(x,t)$ $\qquad U_0(x,t) = Ax^2 + Bx$

$x=0 \to B=1 \qquad x=1 \to 2A+B = 2\sin t + 1 \Rightarrow A = \sin t$

$u = x^2\sin t + x + v(x,t)$

$u_t = x^2\cos t + v_t \qquad u_{xx} = 2\sin t + v_{xx}$

$u(x,0) = x + v(x,0) = 1$

$$\begin{cases} v_t = 3v_{xx} + 6\sin t \\ v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0 \\ v(x,0) = 1-x \end{cases}$$

$$v = \frac{v_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\cos(n\pi x)$$

$$1-x = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos n\pi x$$

$a_0 = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 1 \qquad a_n = 2\int_0^1 (1-x)\cos(n\pi x)\,dx =$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\overset{=0}{(1-x)\sin n\pi x\Big|_0^1} + \int_0^1 \sin n\pi x\,dx\right) = \frac{-2}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1)$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{(n\pi)^2}\left(1-(-1)^n\right)}$$

$$\begin{cases} \frac{v_0'}{2} = 6\sin t \\ v_0(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_n' + 3(n\pi)^2 v_n = 0 \\ v_n(0) = a_n \end{cases}$$

$v_0 = 13 - 12\cos t \qquad v_n = a_n e^{-3(n\pi)^2 t}$

$$v = \frac{13-12\cos t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-3(n\pi)^2 t}\cos n\pi x$$

$$u = x^2\sin t + x + v(x,t)$$