תאריך הבחינה 18.01.11
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
מבחן ב: <u>מבוא למשוואות דיפרנציאליות להנדסת חומרים</u>
מס' הקורס 0201.1.9171
מועד א סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות (משני צדדים), מחשבון פשוט

אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות (משקל של כל שאלה שווה ל-25 נקודות)
ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד.
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה.

בהצלחה!

שאלה מס' 1.

1א) (12 נק') פתרו בעיית תנאי ההתחלה $xy'-3y=3y^{1/3}\ln x, \quad y(1)=0$

פתרון $y\equiv 0$ מק"מ תנאי ההתחלה.
אך תנאי משפט יחידות לא מתקיימים:

$$y'=f(x,y)=\frac{3}{x}y+\frac{3}{x}\ln x\cdot y^{1/3}$$

והפונקציה f לא גזירה לפי y בנק' $(x_0,y_0)=(1,0)$.
אז צריך לחפש פתרונות נוספים. זאת משוואת ברנולי.

$$y^{-1/3}y'-\frac{3}{x}y^{2/3}=\frac{3\ln x}{x} \Longrightarrow u=y^{2/3} \Longrightarrow$$

$$\frac{3}{2}u'-\frac{3}{x}u=3\frac{\ln x}{x} \Longrightarrow u'-\frac{2}{x}u=\frac{2\ln x}{x}$$

$$u=C(x)e^{\int\frac{2}{x}dx}=C(x)x^2$$

$$C'\cdot x^2=\frac{2\ln x}{x} \qquad C'=\frac{2\ln x}{x^3}$$

$$C=2\int\frac{\ln x}{x^3}dx=-\int\ln x\, d\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{\ln x}{x^2}+\int\frac{dx}{x^3}=$$

$$=-\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2x^2}+C_0 \qquad (x>0).$$

$$y^{2/3}=x^2\left[-\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2x^2}+C_0\right]=-\ln x-\frac{1}{2}+C_0x^2$$

$$y(1)=0 \Longrightarrow C_0=\frac{1}{2}$$

<u>תשובה:</u> 1) $y=0$ 2) $y^{2/3}=\frac{x^2-1}{2}-\ln x$

1ב) (13 נק') מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה

$$y' = \frac{2x-y+1}{2y+x+1}$$

$$\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 2y+x+1=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x_0 = -3/5 \\ y_0 = -1/5 \end{matrix}$$

$$x = X - 3/5 \qquad \frac{dY}{dX} = \frac{2X-Y}{2Y+X}$$

$$y = Y - 1/5$$

$$Y = z(X)X \Longrightarrow z + X\frac{dz}{dX} = \frac{2-z}{2z+1}$$

$$X\frac{dz}{dX} = \frac{2-z-2z^2-z}{2z+1} = -\frac{2z^2+2z-2}{2z+1}$$

1) $z^2+z-1=0$

2) $z^2+z-1\neq 0$ $\qquad \frac{(2z+1)dz}{z^2+z-1} = -2\frac{dX}{X}$

$$\int\frac{(2z+1)dz}{z^2+z-1} = -2\int\frac{dX}{X}$$

$$\int\frac{d(z^2+z-1)}{z^2+z-1} = \ln|z^2+z-1| = -2\ln|X| + C_0$$

אז

$$(z^2+z-1)X^2 = C \neq 0$$

ניתן לאחד מקרים 1) ו- 2):

$$(z^2+z-1)x^2 = C$$

$$Y^2+XY-X^2 = C$$

תשובה:

$$\left(y+\frac{1}{5}\right)^2 + \left(x+\frac{3}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right) - \left(x+3/5\right)^2 = C$$

שאלה מס' 2.

2א) (13 נק') מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה $y''+9y=\dfrac{1}{\sin(3x)}$

1) $r^2+9=0 \longrightarrow \tilde{y}=C_1\sin 3x+C_2\cos 3x$

2) $y=C_1(x)\sin 3x+C_2(x)\cos 3x$

$$\begin{cases} C_1'\sin 3x+C_2'\cos 3x=0 \\ 3C_1'\cos 3x-3C_2'\sin 3x=\dfrac{1}{\sin 3x} \end{cases} \Longrightarrow$$

$C_1'=\dfrac{\cos 3x}{3\sin 3x}$ $\qquad C_1=\dfrac{1}{9}\ln|\sin 3x|+C_{10}$

$C_2'=-\dfrac{1}{3}$ $\qquad C_2=-\dfrac{x}{3}+C_{20}$

$$y=\left(\frac{1}{9}\ln|\sin 3x|+C_{10}\right)\sin 3x+\left(-\frac{x}{3}+C_{20}\right)\cos 3x$$

2ב) (12 נק') מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה: $y^{(6)}-2\sqrt{3}y^{(3)}+2y=0$

משוואה אופיינית: $z^6-2\sqrt{3}z^3+2=0$

$z^3=\sqrt{3}\pm\sqrt{3-2}=\sqrt{3}\pm1$

$z^3=\sqrt{3}+1$ או $z^3=\sqrt{3}-1$

$R_1=|z|=\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}$ או $R_2=|z|=\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$

$z_0=R_1$

$z_1=R_1\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=R_1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_2=R_1\left(\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=R_1\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_3=R_2$

$z_4=R_2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad z_5=R_2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$y=C_1e^{R_1x}+C_2e^{-\frac{R_1}{2}x}\cos\left(R_1\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_3e^{-\frac{R_1}{2}x}\sin\left(R_1\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+$$
$$+C_4e^{R_2x}+C_5e^{-\frac{R_2}{2}x}\cos\left(R_2\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_6e^{-\frac{R_2}{2}x}\sin\left(R_2\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

שאלה מס' 3. מצאו פתרון כללי של מערכת

$$\begin{cases} x' = 5x - 2y + 6te^{3t} \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

$$y'' = 2x' + y' = 2(5x - 2y + 6te^{3t}) + y' = \left\{ \boxed{x = \frac{y' - y}{2}} \right\}$$

$$= 5y' - 5y - 4y + 12te^{3t} + y'$$

$$y'' - 6y' + 9y = 12te^{3t}$$

1. $r^2 - 6r + 9 = 0 \qquad (r-3)^2 = 0$

$\tilde{y} = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$ פתרון של מ. הומוגנית:

2. $\hat{y} = t^2(At + B)e^{3t} = (At^3 + Bt^2)e^{3t}$ שלכה של המשוואת מקצמית:

$$\hat{y}' = (3At^2 + 2Bt + 3At^3 + 3Bt^2)e^{3t}$$

$$\hat{y}'' = (6At + 2B + 9At^2 + 6Bt + 9At^2 + 6Bt + 9At^3 + 9Bt^2)e^{3t}$$

$$\begin{array}{l|l} t^3 & 9A - 6\cdot 3A + 9A = 0 \\ t^2 & 9A + 9A + 9B - 18A - 18B + 9B = 0 \\ t & 6A + 6B + 6B - 12B = 12 \\ 1 & 2B = 0 \end{array} \quad \Bigg\} \quad \begin{array}{l} A = 2 \\ B = 0 \end{array}$$

$$\hat{y} = 2t^3 e^{3t}$$

תשובה:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + 2t^3 e^{3t} \\ x = \dfrac{y' - y}{2} \end{array}}$$

שאלה מס' 4.

מצאו פתרון $u(x,t)$ לבעיה הבאה על חצי-ציר (12 נק')

$$\begin{cases} u_t = au_{xx}, & 0<x<\infty,\ t>0, \\ u_x(0,t)=0, & u(x,0)=\begin{cases}1 & 0<x<2 \\ 0 & 2\le x\end{cases} \end{cases} = f(x)$$

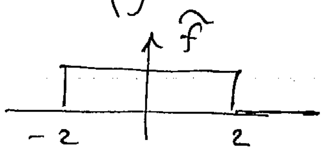
ומצאו את המומנט $M_2(t)=\int_0^\infty x^2u(x,t)dx$ (6 נק').

הוכיחו כי מומנט $M_1(t)=\int_0^\infty xu(x,t)dx$ מקיים משוואה $\frac{dM_1}{dt}=au(0,t)$ (7 נק').

1. נפתור בע'ת Cauchy את תנאי' ההתחלה,

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\geq 0 \\ f(-x) & x<0 \end{cases}$$ (המשך זוגי של f)

$$\tilde{f}=\theta(x+2)-\theta(x-2)$$



והפתרון

$$\tilde{u}=\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{erf}\frac{x+2}{2\sqrt{at}}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{erf}\frac{x-2}{2\sqrt{at}}\right)$$

מקיים את המשוואה ו- $\tilde{u}_x(0,t)=0$. אז זה פתרון הבעיה הנתונה בתחום $x>0$.

2.

$$M_2(t)=\int_0^\infty \tilde{u}(x,t)x^2dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(x,t)x^2dx=$$

$$=\frac{1}{2}\tilde{M}(t)=\frac{1}{2}a\,2\cdot 1\,\tilde{M}_0=a\int_{-2}^{2}1dx=4a$$

$$M_2(0)=\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}$$

$$M_2(t)=4at+\frac{8}{3}$$

3.

$$\frac{dM_1}{dt}=\frac{d}{dt}\int_0^\infty x\,u(x,t)dx=\int_0^\infty x\frac{\partial u}{\partial t}dx=a\int_0^\infty x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx=$$

$$=a\left(\underbrace{x\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^\infty}_{=0}-\int_0^\infty\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)=a\left(-u\Big|_0^\infty\right)=au(0,t)$$

כי $u,\ x\frac{\partial u}{\partial x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$

שאלה מס' 5. פתרו את הבעיה הבאה:

$$u_t = 2u_{xx} - u, \qquad 0 < x < 1, t > 0$$
$$u_x(0,t) = 1, \quad u(1,t) = t,$$
$$u(x,0) = x$$

1) $u = v + A(t)x + B(t)$

$x=0 \to \quad A(t) = 1 \qquad x = 1 \to 1\cdot 1 + B(t) = t, \quad B = t-1$

$u = v + x + t - 1.$

$u_t = v_t + 1 \qquad u_{xx} = v_{xx} \qquad u(x,0) = v(x,0) + x - 1 = x \to v(x,0) = 1$

$1 + v_t = 2v_{xx} - v - x - t + 1$

$$\begin{cases} v_t = 2v_{xx} - v - x - t \\ v_x(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = 1 \end{cases}$$

2) $v = e^{-t} w(x,t).$ $\qquad \begin{cases} w_t = 2w_{xx} - e^t(x+t) \\ w_x(0,1) = w(1,t) = 0 \\ w(x,0) = 1 \end{cases}$

3) $w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}$ $\qquad \underline{\sigma_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}}$ נסמן

$1 = \sum_0^{\infty} a_n \cos(\sigma_n x) \qquad a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 \cos(\sigma_n x)dx = \frac{2}{\sigma_n} \sin\sigma_n = \underline{\underline{\frac{2(-1)^n}{\sigma_n}}}$

$e^t t = e^t t \sum_0^{\infty} a_n \cos(\sigma_n x)$

$e^t x = e^t \sum_0^{\infty} b_n \cos(\sigma_n x) \qquad b_n = 2\int_0^1 x\cos(\sigma_n x)dx =$

$= \frac{2}{\sigma_n}\left(1\cdot\sin\sigma_n - \int_0^1 \sin(\sigma_n x)dx\right) = \frac{2}{\sigma_n}\left(\underbrace{\sin\sigma_n}_{=(-1)^n} + \frac{\overbrace{\cos\sigma_n}^{=0} - 1}{\sigma_n}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{\sigma_n}\left((-1)^n - \frac{1}{\sigma_n}\right)}}$

$f = -e^t(x+t) = \sum_0^{\infty} f_n(t)\cos(\sigma_n x)$

$f_n(t) = -e^t(ta_n + b_n)$

$$\begin{cases} w_n' + 2\sigma_n^2 w_n = -e^t(ta_n + b_n) \\ w_n(0) = a_n \end{cases}$$

$$w_n = \underbrace{C_n e^{-2\sigma_n^2 t}}_{\widetilde{w}_n} + \underbrace{e^t(A_n t + B_n)}_{\hat{w}_n}$$

שיטת השוואת מקדמים:

$$\hat{W}_n: \quad e^t A_n + e^t(A_n t + B_n) + 2\delta_n^2 e^t (A_n t + B_n) = -e^t(a_n t + b_n).$$

$$\begin{array}{l|l} te^t & A_n(1+2\delta_n^2) = -a_n \Rightarrow \boxed{A_n = -\dfrac{a_n}{1+2\delta_n^2}} \\ e^t & A_n + B_n(1+2\delta_n^2) = -b_n \Rightarrow \boxed{B_n = -\dfrac{b_n + A_n}{1+2\delta_n^2}} \end{array}$$

$$t=0 \to \quad W_n(0) = a_n \to \quad C_n + B_n = a_n$$

$$\boxed{C_n = a_n - B_n}$$

$$W = \sum_0^\infty W_n(t) \cos \delta_n x$$

$$u = \underbrace{e^{-t} W}_{v} + x + t - 1$$