

תרגול 8
טור פורייה

א. טור פורייה לפונקציה $f(x)$ בקטע $(-l, l)$

$$\left\{ 1, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l} \right\} \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad x \in (-l, l)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = S(x), \quad S(x+2l) = S(x),$$

$$S(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} \quad : (-l, l) \quad \underline{\text{בקטע}}$$

$$S(x_0) = \frac{S(x_0+0) + S(x_0-0)}{2} \quad : (-\infty, \infty) \quad \underline{\text{בקטע}}$$

ב. אם פונקציה $f(x)$ זוגית בקטע $(-l, l)$ אזי $(f(-x) = f(x))$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = 0, \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad x \in (-l, l)$$

ג. אם פונקציה $f(x)$ אי-זוגית בקטע $(-l, l)$ אזי $(f(-x) = -f(x))$

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad x \in (-l, l)$$

ד. טור קוסינוסים לפונקציה $f(x)$ בקטע $(0, l)$

$$\left\{ 1, \cos \frac{n\pi x}{l} \right\} \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad x \in (0, l)$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

ה. טור סינוסים לפונקציה $f(x)$ בקטע $(0, l)$

$$\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\} \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad x \in (0, l) \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

תרגילים

I. צייר את הגרפים של הפונקציות הבאות :

1) $f(x) = x - 1, -2 < x < 2, f(x+4) = f(x), f(1) = ?, f(15) = ?, f(30) = ?$

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 3, & 1 \leq x < 2 \end{cases}, f(x+2) = f(x), f(-1) = ?, f(2.5) = ?, f(13.7) = ?$

3) $f(x) = x, 0 < x < 2, f(-x) = f(x), f(x+4) = f(x)$

4) $f(x) = x, 0 < x < 2, f(-x) = -f(x), f(x+4) = f(x)$

5) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}, f(-x) = f(x), f(x+2\pi) = f(x)$

6) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}, f(-x) = -f(x), f(x+2\pi) = f(x)$

II. פתח לטור פורייה את הפונקציות הבאות :

7) $f(x) = \begin{cases} 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 2 \end{cases}, -2 \leq x < 2$

8) $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = ? \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$

9) $f(x) = \sin \frac{x}{2}, -\pi < x < \pi$

10) $f(x) = 3 - x, -2 < x < 2, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = ?$

11) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}, -\pi < x \leq \pi$

12) $f(x) = 1, 0 < x < 3$ טור סינוסים

צייר את הגרף של הפונקציה $S(x)$ בקטע $[-5, 0]$.

13) $f(x) = x, 0 \leq x \leq \pi$ טור קוסינוסים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = ?$

14) $f(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x < 1 \\ x-2, & 1 \leq x < 2 \end{cases}, 0 \leq x < 2,$

טור סינוסים 14.1)

טור קוסינוסים 14.2)

15) $f(x) = 5 \sin 3x - 7 \cos 4x, -\pi < x < \pi$

16) פתחי את הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ לטור פורייה של קוסינוסים.

לאיזו הפונקציה מתכנס הטור בקטע $[-2, 0]$?

17) פתחי את הפונקציה $f(x) = x^2 + x$ לטור פורייה בקטע $[-2, 2]$. מהו סכום הטור בנקודה $x = 2$? מהו סכום הטור בקטע $[2, 4]$?

תשובות

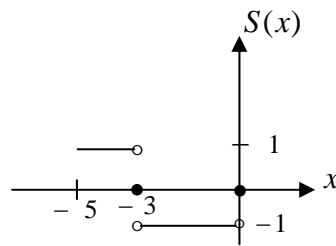
8) $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$, $(-\pi < x < \pi)$

9) $f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 - 0.25} \sin nx$, $(-\pi < x < \pi)$

10) $f(x) \sim 3 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}$, $(-2 < x < 2)$

11) $f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right)$, $(-\pi < x < \pi)$

12) $f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{3} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{3}$, $(0 < x < 3)$



13) $f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$, $(0 < x < \pi)$

14.1) $f(x) \sim -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2}$, $(0 < x < 2)$

14.2) $f(x) \sim -\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n - 2 \cos \frac{n\pi}{2}}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$, $(0 < x < 2)$

16) $f(x) \sim \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2} - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$, $(0 < x < 2)$

בקטע $[-2, 0]$ הטור מתכנס לפונקציה $\begin{cases} 1, & -2 \leq x \leq -1 \\ -x, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$

17) $x^2 + x \sim \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2 \pi} \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2} \right)$, $(-2 < x < 2)$

$S(2) = 4$