משוואה חום (משוואת דיפוזיה)

בעיית התחלה (Cauchy) למשוואת דיפוזיה עבור

נדון במשוואת חום (נקראת גם משוואת דיפוזיה) עם תנאי התחלה על כל הציר

$$u_t=u_{xx},\ u(x,0)=u_0(x),\ -\infty<x<\infty,\ t\geq 0$$

לפני שנעבור לפתרון של בעיית ההתחלה הזאת נציין כמה תכונות של הפתרון שאפשר להסיק מבלי לפתור אותה.

א׳ תכונה ייחודית של משוואת חום היא שהקווים $t=const$ הם אופיינים שלה, ולכן בעיית ההתחלה במובן הרגיל של המונח הזה (כלומר כזאת המורכבת משני נתונים עבור הזמן ההתחלתי) לא פתירה עבורה. לעומת זאת הבעיה עם תנאי התחלה יחיד פתירה, וכפי שנראה בהמשך בתנאים שבדרך כלל מתקיימים בבעיות פיסיקליות הפתרון הוא יחיד.

ב׳ נשתמש בעובדה הבאה שנקבל כאשר נפתור את בעיית התחלה: עבור $|x|\to\infty$ הפתרון מתנהג כמו הפונקציה ההתחלתית. נניח בנוסף ש- u_0 יורדת מספיק מהר עם גידול ב- $|x|$, ליתר דיוק נניח שעבור כל $\alpha>0$ קיים קבוע $c>0$ כך שכאשר $|x|\to\infty$ מתקיים

$$|u_0(x)|<ce^{-\alpha x}$$

מצב כזה שכיח בבעיות מעשיות.

נגדיר מושג **מומנט מסדר *n*** של פונקציה u:

$$M_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x^n u(x,t)dx$$

ניתן למשוואה מובן של משוואה המתארת דיפוזיה, אז המשמעות הפיסיקלית של u היא צפיפות המסה. בפירוש הזה עבור $n=0,1,2$ למומנטים יש משמעות פיסיקלית ברורה:

$$M_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)dx$$

כלומר M_0 שווה למסה כוללת של החומר.

$$M_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}xu(x,t)dx$$

כלומר M_1/M_0 שווה למרכז הכובד.

$$M_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2u(x,t)dx$$

על כן המומנט השני מתאר דיספרסיה – התפלגות של החומר על פני הציר (או מומנט של מסה).

נגזור מומנטים לפי הזמן

$$\frac{d}{dt}M_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}(x,t)dx=u_x\,|_{-\infty}^{\infty}=0$$

האינטגרל שווה ל-0 בזכות ההנחה על הפונקציה ההתחלתית ובגלל העובדה שציינו לעיל ש- u מתנהגת בקצוות בדומה ל- u_0.

מכאן $M_0(t)=const$, כלומר המסה נשמרת. כפי שזכור, את משוואת דיפוזיה קיבלנו בהנחה על כך שמסה נשמרת על כן התוצאה הזאת לא מפתיעה במיוחד אלא משמשת יותר לבדיקה שבתהליך הפישוט שבאמצעותו הגענו למשוואת דיפוזיה לא הפסדנו את התכונה הזאת (כלומר לו הייתה מתקבלת תוצאה ש- M_0 לא נשמרת היינו חייבים לבדוק את תהליך קבלת המשוואה מחדש).

נדון בהתנהגות של M_1.

$$\frac{d}{dt}M_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}xu_t(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}xu_{xx}(x,t)dx=xu_x\,|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}u_x(x,t)dx=0$$

מכאן שמיקום של מרכז הכובד של המסה נשמר בתהליך דיפוזיה. זאת תוצאה מעניינת שלא ניתן היה לנחש אותה מהמשוואה עצמה.

באופן כללי

$$\frac{d}{dt}M_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x^nu_t(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^nu_{xx}(x,t)dx=\underbrace{x^nu_x\,|_{-\infty}^{\infty}}_{\parallel\atop 0}-n\int_{-\infty}^{\infty}x^{n-1}u_x(x,t)dx=$$

$$=\underbrace{-nx^{n-1}u\,|_{-\infty}^{\infty}}_{\parallel\atop 0}+n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}x^{n-2}u(x,t)dx=n(n-1)M_{n-2}$$

כך שעבור המומנט השני מתקיים

$$\frac{d}{dt}M_2(t)=2M_0(t)=2M_0\ \Rightarrow\ M_2(t)=2M_0\cdot t+M_2(0)$$

כלומר מידת הפיזור של החומר עולה עם הזמן: הענן ההתחלתי של החומר מתפזר כך שתהליך הדיפוזיה בלתי הפיך: אם נתחיל מהתפלגות החומר בזמן כלשהו ונעקוב אחרי התהליך אחורה בזמן, נקבל בשלב מסוים ($t=t^*$) שכל המסה מתרכזת בנקודה אחת ($M_2(t^*)=0$); אחרי הזמן הזה לערך u אין משמעות, כי הרי צפיפות לא יכולה להיות שלילית.

ג׳ נניח שבתחילת התהליך ל-u_0 היה ערך אקסטרמאלי (מינימום או מקסימום מקומי) בנקודה x_0; נדון במקרה של המקסימום. כידוע בנקודת מקסימום מתקיים $u_0''(x_0)\le 0$. נניח שהנגזרת ממש קטנה מ-0 (מסתבר שההנחה הזאת לא משנה את הכלליות של המסקנה שנגיע אליה). אם נציב את הנתון הזה למשוואת דיפוזיה נקבל

$$u_t\big|_{x=x_0,t=0}=u_{xx}=u_0''(x_0)<0$$

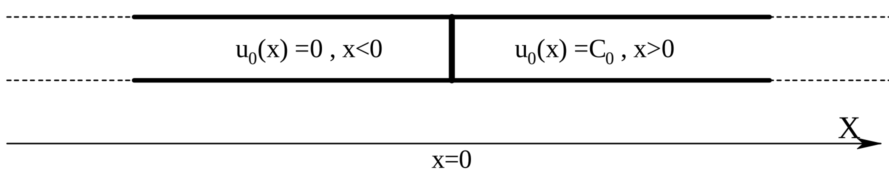
כלומר הערך של u יורד עם הזמן. בדרך דומה אפשר לראות שבנקודת המינימום הערך עולה עם הזמן. כל נקודת זמן בתהליך אפשר לבחור כנקודה התחלתית ולקבל מסקנה דומה. כלומר תהליך דיפוזיה מאופיין בזה שנקודות אקסטרמום "נבלעות".

נעבור לדיון בפתרון של בעיית ההתחלה.

כאשר דננו בפתרון של משוואת גלים אי-הומוגנית הדגמנו הצגות שונות של השפעה חיצונית באמצעות פירוק של הגורם המייצג את ההשפעה הזאת לאלמנטים בסיסיים. ראינו שבדרך הזאת את הגורמים המייצגים השפעות חיצוניות אפשר להכניס לתוך המשוואה בשתי דרכים שונות: בתור גורם אי-הומוגני או כתנאי שפה. בהקשר של משוואת דיפוזיה גם פתרון של המשוואה הומוגנית על כל הציר (כלומר ללא תנאי שפה) נוח להציג באמצעות פתרונות בסיסיים אשר כל אחד מהם אפשר לפרש כמקור רגעי של חומר (או של חום), כלומר פיזור של חומר בריכוז כלשהו ברגע התחלתי של התהליך.

כדי להגיע לפתרונות האלה נתחיל את הדיון בבעיה פיסיקלית הבאה:

נתונים שני כלים צרים שאורכם אינסופי לכיוון אחד (כל אחד לכיוון אחר) ומחוברים ביניהם בקצוות הסופיים בנקודה x=0.. בתחילת התהליך בכלי הימני נמצא חומר כלשהו בריכוז אחיד C_0>0 ואילו הכלי השמאלי ריק מהחומר הזה. הכלים מופרדים על-ידי מחיצה אשר נפתחת ברגע t=0. יש למצוא את האופן שבו החומר מתפזר עם הזמן.



הערה. בהקשר של חום אפשר לדבר על שני מוטות הבנויים מאותו חומר מעביר חום. שני המוטות אינסופיים לכיוון אחד (כל אחד לכיוון אחר) ומחוברים ביניהם בקצוות הסופיים בנקודה x=0.. בתחילת התהליך המוט הימני נמצא בטמפרטורה אחידה C_0>0 ואילו המוט השמאלה בטמפרטורה 0.

מבחינה מתמטית הבעיה הזאת מתורגמת לבעיית התחלה הבאה

$$C_t = DC_{xx},\ t>0, -\infty<x<\infty,\quad C(x,0)=\begin{cases}0, x<0\\ C_0, x>0\end{cases}$$

הפתרון מבוסס על השיקול של מימד יסיקלי של הגורמים המופיעים במשוואה. שימוש במימדים פיסיקליים למציאת צורת הפתרון של משוואות מתמטיות הוא כלי חשוב בניתוח של מד"חים!

משתנה חסר מימד יכול להיות תלוי במשתנים ממדיים רק כקומבינציות חסרות ממדים, כי ערך חסר מימד הוא פשוט מספר ואילו ערכים ממדיים תלויים בקנה מידה שנבחר.

ניתן ל- C פירוש של ריכוז חומר כלשהו ליחידת אורך. נדון במימד של הגורמים המופיעים במשוואה שלנו. נסמן ב- M יחידות מסה, ב-L יחידות אורך וב-T יחידות זמן. נקבל

$[C]=M/L;\ [x]=L;\ [t]=T \Rightarrow [C_t]=M/LT;\ [C_{xx}]=M/L^3 \Rightarrow [D]=[C_t]/[C_{xx}]=L^2/T$

נעבור לניסוח הבעיה ללא ממדים. נגדיר

$$u=C(x,t)/C_0$$

עבור u נקבל משוואה

$$u_t=Du_{xx},\ u(x,0)=\begin{cases}0, x<0\\1, x>0\end{cases}$$

המשתנה u הוא פונקציה חסרת ממדים של משתנים בעלי ממדים, לכן צריכה להיות קומבינציה חסרת ממדים של המשתנים האלה כך ש- u היא פונקציה של הקומבינציה הזאת.

הייחודיות של תנאי התחלה שבחרנו היא שאין בו שום פרמטר מאפיין את הבעיה אשר יש לו מימד של אורך. לכן הפתרון יכול להיות תלוי רק ב- D ובמשתנים x ו-t המרכבים ביחד קומבינציה חסרת ממדים. תכונות ספציפיות של תנאי התחלה שבחרנו לא יכולות לבוא לידי ביטוי בקומבינצית המשתנים שאנו מחפשים.

הערה. השיקול הזה מבוסס על הנחה שבעיה עצמה לא טומנת בחובה קנה מידה של מרחב או זמן אשר לא בא לידי ביטוי באופן מפורש בניסוח הבעיה.

כפי שראינו המימד של D הוא L^2/T, הקומבינציה חסרת ממדים היחידה שכוללת את D, x ו-t שאפשר לקבל היא $\frac{x}{\sqrt{Dt}}$. על כן משיקולים ממדיים אנו רואים ש- u היא פונקציה כלשהי של הקומבינציה הזאת. נגדיר משתנה חדש

$$z=\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$$

ונחפש $u(x,t)=U(z)$. היתרון של הצורה הזאת היא שהפתרון מתואר באמצעות פונקציה של משתנה יחיד z ולא של שני משתנים, וכך במקום מד״ח נקבל מד״ר.

הערה. המקדם 2 שמופיע במכנה נבחר משיקולי נוחות הפיתוח בהמשך.

מתקיים

$$U_t(z)=U'\frac{\partial z}{\partial t}=-U'\frac{x}{4\sqrt{Dt^3}};$$

$$U_x(z)=U'\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{U'}{2\sqrt{Dt}};\quad U_{xx}(z)=\frac{d}{dz}\left(\frac{U'}{2\sqrt{Dt}}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{U''}{2\sqrt{Dt}}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{U''}{4Dt}$$

נציב את הביטויים האלה במשוואה:

$$-U'\frac{x}{4\sqrt{Dt^3}}=D\frac{U''}{4Dt}\ \Rightarrow\ -U'\frac{x}{\sqrt{Dt}}=U''\ \Rightarrow\ U''=-2zU'$$

נתייחס לתנאי התחלה. עבור כל $x>0$ כאשר $t\to 0$ נקבל $z\to\infty$. לכן

$$u(x>0,0)=1\ \Rightarrow\ \lim_{z\to\infty}U(z)=1$$

עבור כל $x<0$ כאשר $t\to 0$ נקבל $z\to-\infty$. לכן

$$u(x<0,0)=0\ \Rightarrow\ \lim_{z\to-\infty}U(z)=0$$

ובכן נפתור את המד״ר שקיבלנו עם תנאי שפה האלה. נסמן $V=U'$ ונקבל מד״ר

$$V'=-2zV$$

שפתרונו

$$V(z)=Ae^{-z^2}$$

ומכאן מקבלים

$$U(z)=A\int_{-\infty}^{z}e^{-s^2}ds+B$$

מהתנאי $\lim_{z\to-\infty}U(z)=0$ מקבלים B=0. מהתנאי $\lim_{z\to\infty}U(z)=1$ מקבלים

$$A\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=1$$

כדי למצוא את A נחשב את האינטגרל שמופיע באגף שמאל של השוויון הזה

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\ \Rightarrow I^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dy$$

נעבור לקואורדינאטות קוטביות:

$$\rho^2=x^2+y^2,\ \varphi=\mathrm{arctg}(y/x)\Rightarrow dydx=\rho d\rho d\varphi$$

כך שנקבל

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi=\pi$$

על כן $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}$, לכן $A=\pi^{-1/2}$. ובכן

$$U(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-s^2}ds$$

דרך אחרת לרשום את הנוסחה הזאת היא לפרק את האינטגרל לאינטגרל מ- $(-\infty)$ עד 0 ולאינטגרל שהגבול התחתון שלו הוא 0.

משיקולי סימטריה של הפונקציה מתחת לאינטגרל מקבלים

$$\int_{-\infty}^{0}e^{-s^2}ds\ =\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

על כן

$$U(z)=U(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-s^2}ds=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z}e^{-s^2}ds\right)$$

האינטגרל באגף ימין היא הפונקציה חשובה בתחומים שונים של מתמתיקה אשר נקראת פונקצית השגיה (error function). לפונקציה הזאת יש סימון מיוחד

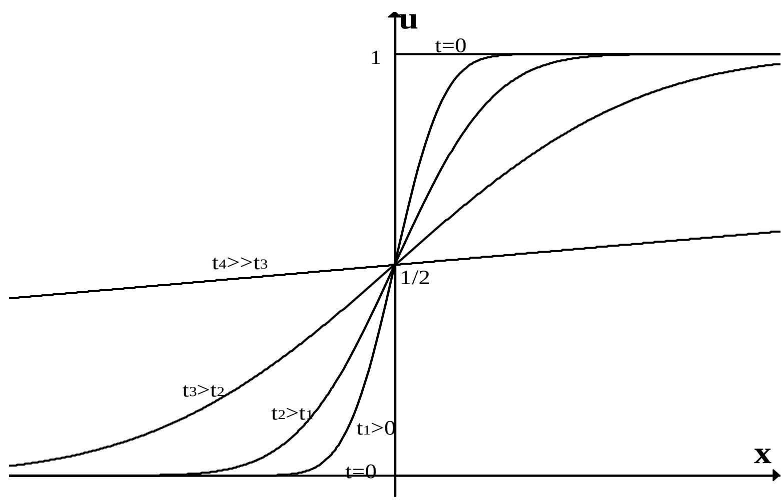
$$erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-s^2}ds$$

נחזור למשתנים המקוריים x ו– t ונקבל

$$u(x,t)=U(z)=\frac{1}{2}\left(1+erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right)$$

הערה. לפי הנוסחה הזאת עבור כל $t>0$ מתקיים $u(0,t)=1/2$. כדי להתאים את הפתרון הזה לתנאי התחלה נקבע $u(0,0)=1/2$. אנו יכולים להרשות לעצמנו לעשות כן כי מבחינה פיסיקלית אין משמעות להגדרה של תנאי התחלה בנקודה בודדת $x=0$.

נתבונן על התנהגות של הפונקציה u כאשר t גדל. המדרגה "נמרחת" יותר ויותר (ראה איור).



עבור $t=0$ הפונקציה לא רציפה, ואילו עבור כל $t>0$ הפונקציה לא רק רציפה אלא אנליטית (כלומר גזירה אינסוף פעמים). נבין את העובדה הזאת מתורת האופיינים. כפי שלמדנו אי–רציפויות יכולות להיכנס לתחום הפתרון רק באמצעות האופיינים. למשוואה פארבולות יש משפחה אחת של אופיינים. האופיינים הם מהצורה $t=const$. תחום הפתרון שלנו ניצב לאופיינים ולכן אי–רציפויות לא יכולות להיכנס לתחום הפתרון.

נשים לב שאם u פותר משוואת חום אז גם $w=u_x$ מקיים את אותה משוואה:

$$w_t-Dw_{xx}=u_{xt}-Du_{xxx}=(u_t-Du_{xx})_x=0$$

ובפרט, אם u הוא פתרון של הבעיה שפתרנו זה עתה אז גם

$$u_x(x,t)=\frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2\sqrt{\pi Dt}}$$

פותר את משוואה. מפאת חשיבותה לפונקציה הזאת יש סימון מיוחד:

$$E(x,t)=\frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2\sqrt{\pi Dt}}$$

מתקיים $E(0,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}$ לכן $\lim_{t\to 0}E(0,t)=\infty$

ואילו עבור $x>0$

$$E(x,0)=\lim_{t\to 0}E(x,t)=0$$

כלומר הפונקציה E מקיימת תנאי התחלה

$$E(x,0)=\begin{cases}0, x>0\\ \infty, x=0\end{cases}$$

או $E(x,0)=\delta(0)$. בנוסף עבור כל $t>0$ מתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty}E(x,t)dx=1$$

ולכן

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}E(x,t)dx=1$$

אם נגדיר

$$\int_{-\infty}^{\infty}E(x,0)dx=1$$

נקבל ש- $E(x,0)$ היא פונקצית דלטא שפגשנו בקורס מד״רים בהקשר של הצגה של אימפולסים רגעיים והשפעתם על מערכות פיסיקליות.

ובכן מצאנו פתרון לבעיית התחלה הבאה

$$u_t=Du_{xx},\ u(x,0)=\delta(0)$$

נמשיך את הדיון בהקשר של משוואה מנורמלת כך ש- D=1 (את זה עושים על-ידי נירמול המשתנים).

נגדיר

$$G(x,\xi,t,\tau)=E(x-\xi,t-\tau)=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}$$

כלומר הפונקציה G פותרת בעיית התחלה כאשר תנאי התחלה הוא נתון בצורת δ-פונקציה $E(x,\tau)=\delta(\xi)$ עבור נקודות ξ וזמני התחלה τ שונים.

הפתרון של בעיית התחלה כללית על כל הציר ניתן להציג כסכום (אינטגרל) של הפתרונות עבור מקורות רגעיים

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$$

בהמשך נראה שבתנאים שבדרך כלל מתקיימים בבעיות פיסיקליות הפתרון הזה הוא יחיד.

המשמעות האינטואיטיבית של הפתרון הזה בהקשר של דיפוזיה: בזמן $t=0$ כל נקודה במרחב משמשת כמקור לחומר (כלומר בה משתחרר החומר) אשר עוצמתו היחסית בנקודה x נתון על-ידי תנאי ההתחלה $u_0(x)$. הפתרון מתאר שינויים של פיזור החומר במרחב עם הזמן והוא מתקבל כסופרפוזיציה של הפתרונות האלמטנריים האלה.

כדי להוכיח נכונות הפתרון יש להציב אותו במשוואה ולראות שהפתרון אכן מקיים את המשוואה. נוודא ש-u מקיימת את תנאי ההתחלה:

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\delta(x-\xi) d\xi = u_0(x)$$

הפתרון הזה נקראה פתרון באמצעות **אינטגרל Poisson**.

קיימים שני הבדלים עקרוניים בין משוואת חום ומשוואת גלים בהקשר של התפשטות המידע ההתחלתי:

א׳ בניגוד לפתרון של משוואת גלים שבה הפתרון מתפשט במהירות סופית, כאן יש שינויים מיידיים לאורך כל המרחב, כלומר המידע מתפשט במהירות אינסופית. התכונה הזאת נובעת מהתנאי שהתבססנו בו כדי לקבל את משוואת חום ממשוואת המברקן: התנאי היה שהזנחנו את הגורם שמבטא את האינרציה של המערכת. הרי אינרציה היא זו שמונעת מהירויות אינסופיות.

ב׳ כפי שראינו, בניגוד לפתרון של משוואת גלים הפתרון של משוואת חום הוא בלתי הפיך: אם ניקח את הפתרון החלק שמתקבל עבור $t_1>0$ כמצב התחלתי וננסה לפתור אותה ״חזרה״ אז עבור הזמן $t=0$ נקבל פונקצית מדרגה או פונקצית דלטא. לא נוכל להמשיך את הפתרון אחורה מעבר לזמן $t=0$ כי פונקציות מדרגה ופונקציית דלטא הן סינגולריות ולכן היא לא מהווה פתרון למשוואת חום.

הערה. את הפתרון לעיל מצאנו בהנחה של מקדם דיפוזיה (או העברת חום) D המופיע במשוואה פארבולית הוא קבוע. אין חשיבות עקרונית בהנחה הזאת: אם D תלוי בזמן אפשר לבטל את התלות הזאת על-ידי שינוי משתנה:

$$u_t=D(t)u_{xx}$$

נגדיר משתנה חדש τ:

$$\tau = \int_0^t D(s)ds$$

כיוון שבכל מקרה $D>0$, τ היא פונקציה חד-ערכית של t, נקבל

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = D(t)\frac{\partial u}{\partial \tau}$$

כך ש-

$$u_\tau=u_{xx}$$

בעיית שפה\התחלה על חצי ציר

מבחינה פיסיקלית המשמעות של דיון בבעיה על חצי ציר היא שמחפשים פתרון (לדוגמה, התפלגות טמפרטורה במוט) ליד אחד מהקצוות ובטווחים של זמן שהשפעתו של הקצה השני זניחה.

כמו במקרה של משוואת גלים נדון בשני סוגים של בעיות שפה:

א׳ סוג ראשון – בעיית Dirichlet: $u(0,t)=f(t)$ כלומר בקצה יש שליטה בטמפרטורה או בצפיפות.

ב׳ סוג שני – בעיית Neumann: $u_x(0,t)=f(t)$ כלומר בקצה יש שליטה בשטף של טמפרטורה או של חומר.

א׳ בעיית Dirichlet. נתחיל במשוואה הומוגנית עם תנאי שפה הומוגני

$$u_t=u_{xx},\ 0<x<\infty,\ u(0,t)=0,\ u(x,0)=u_0(x)$$

בדומה למה שעשינו בפתרון של משוואת גלים על חצי ציר נפתור את הבעיה הזאת על-ידי השלמת תנאי התחלה אל הציר כולו תוך צמצום של הבעיה הנתונה לבעיית התחלה שכבר פתרנו. כדי למצוא את האופן המתאים שבו יש להשלים את תנאי התחלה נחזור לנוסחה הפותרת את בעיית ההתחלה ונרשום אותה באופן שונה במקצת

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}\left[u_0(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}+u_0(-\xi)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\right]d\xi$$

עבור $x=0$ נקבל

$$u(x,t)\big|_{x=0}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}(u_0(\xi)+u_0(-\xi))e^{-\frac{\xi^2}{4t}}d\xi=0$$

התנאי הזה מתקיים אם עבור כל $0\le\xi<\infty$ מתקיים $u_0(-\xi)=-u_0(\xi)$. על כן את השלמת תנאי התחלה יש לעשות באופן אי-זוגי:

$$u_0(-x)=-u_0(x).$$

ובכן קיבלנו בעיית התחלה הבאה:

$$w_t=w_{xx},\ -\infty<x<\infty,\ \ w(x,0)=w_0(x)$$

$$w(x,0)=\begin{cases}u_0(x), x\ge 0\\ -u_0(-x), x<0\end{cases}$$

הנה פתרון של הבעיה הזאת

$$w(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}w_0(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi==\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}\left[u_0(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}+u_0(-\xi)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}u_0(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\right]d\xi$$

נגדיר

$$G_1(x,\xi,t,0)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\right]$$

הפונקציה הזאת נקראת פונקצית Green לתנאי שפה מסוג ראשון. במונחים החדשים את הפתרון אפשר לרשום כך

$$u(x,t)=\int_0^\infty u_0(\xi)G_1(x,\xi,t,0)d\xi$$

במקרה הכללי כאשר הזמן ההתחלתי הוא τ פונקצית גרין מוגדרת כ–

$$G_1(x,\xi,t,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}}\right]$$

והפתרון הוא

$$u(x,t)=\int_0^\infty u_0(\xi)G_1(x,\xi,t,\tau)d\xi$$

דוגמה. נניח שהפונקציה ההתחלתית היא חיובית קבועה $u_0(x)=c>0$ (המוט נמצא בטמפרטורה קבועה). אנו מצפים שבגלל שבקצה של המוט מתקיים התנאי $u(0,t)=0$ (טמפרטורה שווה ל–0) תהיה ירידה מתמדת של ערך הפונקציה (הטמפרטורה) לאורך המוט. הפתרון שמצאנו מתאר את האופן שבו ערך הפונקציה יורד.

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty u_0(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\right]d\xi=\frac{c}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\right]d\xi$$

לצורך אינטגרציה נכניס משתנים חדשים

$$y=\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}};\quad \mathrm{z}=\frac{\xi+x}{2\sqrt{t}}$$

נקבל

$$u(x,t)=\frac{c}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\right]d\xi=\frac{c}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\frac{-x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-y^2}dy-\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right]=\frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{-x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}e^{-y^2}dy=\frac{2c}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}e^{-y^2}dy$$

או

$$u(x,t)=c\cdot err\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

ב׳ בעיית Neumann.

במקרה הזה מבצעים השלמה זוגית לכל הציר.

$$w_0(x)=w(x,0)=\begin{cases}u_0(x), x\geq 0\\ u_0(-x), x<0\end{cases}$$

כדי לראות את זה מספיק להוכיח שבתנאי זה נגזרת של פונקצית הפתרון מתאפסת בנקודה $x=0$. ובכן

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{\partial}{\partial x}\left.\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}w_0(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi\right)\right|_{x=0}=\left.\left(-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\xi)}{4\sqrt{\pi t^3}}w_0(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi\right)\right|_{x=0}=0$$

כי הפונקציה מתחת לאינטגרל היא אי-זוגית (בגלל ש- w_0 היא זוגית).

במקרה הזה גם הפתרון הוא פונקציה זוגית.

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}u_0(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\right]d\xi$$

אם תנאי התחלה נתון עבור $t=\tau$. מגדירים את פונקצית גרין באופן הבא

$$G_2(x,\xi,t,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}}\right]$$

והפתרון הוא

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}u_0(\xi)G_2(x,\xi,t,\tau)d\xi$$

בעיית שפה\התחלה על קטע

נדון במשוואת חום הומוגנית המוגדרת בקטע עם תנאי שפה הומוגניים

$$u_t=u_{xx},\ u(x,0)=u_0(x),\ u(0,t)=u(1,t)=0,\ 0<x<1,\ t>0$$

נדון בפתרון של נדון בפתרון של הבעיה הזאת בשיטה של הפרדת משתנים.

נחפש פתרון בצורה

$$u=X(x)T(t)$$

נציב את הצורה הזאת לתוך המשוואה ונחלק ב- XT, נקבל

$$T'/T=X''/X$$

אגף שמאל הוא פונקציה של t בלבד, אגף ימין הוא פונקציה של x בלבד, לכן שני האגפים שווים לקבוע.

$$T'/T=X''/X=c$$

נקבל משוואות

$$T'+cT=0;\ X''+cX=0$$

את המשוואה עבור X פתרנו כאשר דננו בשיטה של הפרדת משתנים במקרה ההיפרבולי. שם ראינו ש-c הוא מהצורה

$$c=k^2\pi^2$$

כך ש–

$$X(x) = \sin k\pi x,\ \ \mathrm{k} = 1,2,...$$

אך הפתרון עבור T ייראה אחרת:

$$T(t)=\exp(-k^2\pi^2 t),\ k=1,2,\ldots$$

והפתרון הכללי

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k e^{-k^2\pi^2 t}\cdot \sin k\pi x\right) \tag{1}$$

כאשר הביטוי עבור a_k זהה לזה שהיה במקרה ההיפרבולי:

$$a_k = 2\int_0^1 u_0(\xi)\sin k\pi\xi d\xi$$

הערה. כדי להשלים את הוכחה של נכונות של פתרון (1) צריך להראות שנגזרות של הטור המופיע באגף ימין של (1) המתאימות ל– u_t ו– u_{xx} מתכנסות במידה שווה. נקבל את העובדה הזאת ללא הוכחה.

נראה איך אפשר להציג פתרון (1) באמצעות סכום של השפעות של מקורות רגעיים כפי שהפתרון הוצג במקרים של בעיית התחלה על ציר אינסופי ושל בעיית שפה\התחלה על חצי ציר. לשם כך נכניס את הביטויים המפורשים של המקדמים a_k לתוך נוסחה (1) ונחליף סדר בין אינטגרציה וסכום:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k e^{-k^2\pi^2 t}\cdot\sin k\pi x\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(2\int_0^1 u_0(\xi)\sin k\pi\xi d\xi\right)e^{-k^2\pi^2 t}\cdot \sin k\pi x\right] =$$

$$= \int_0^1\left[2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t}\sin k\pi x\cdot \sin k\pi\xi\right]u_0(\xi)d\xi$$

הערה. להצדקת ההחלפה של סדר בין אינטגרציה וסכום יש להוכיח שהטור בסוגריים מרובים מתכנס במידה שווה עבור כל $t>0$. נקבל את העובדה הזאת ללא הוכחה.

נסמן

$$G(x,\xi,t,\tau) = 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t-\tau)}\sin k\pi x\cdot\sin k\pi\xi$$

הפונקציה הזאת נקראת פונקצית גרין.

במונחים של פונקצית גרין את הפתרון אפשר לרשום כך

$$u(x,t) = \int_0^1 G(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi$$

נדון במשמעות הפיסיקלית של פונקצית גרין. נניח שהפונקציה ההתחלתית u_0 היא פונקצית דלטא

$$u_0(x) = \delta(\xi_0 - \xi)$$

נציב את הפונקציה הזאת לנוסחה, נקבל

$$u(x,t)=\int_0^1 G(x,\xi,t)\delta(\xi_0-\xi)d\xi=G(x,\xi_0,t)$$

כלומר פונקצית גרין מתארת השפעה של מקור רגעי ס של חום או חומר) הנמצא ברגע ההתחלתי (t=0) בנקודה ξ, על הנקודה x בזמן t תוך שמירה על תנאי שפה (כלומר שהטמפרטורה או צפיפות החומר בקצוות היא 0 לאורך כל התהליך). דרך אחרת להגיד את אותו הדבר: המשמעות של $G(x,\xi,t)$ זה התפלגות הטמפרטורה או חמר בקטע $0\le x\le 1$ אם בתחילת התהליך כל הקטע היה בטמפרטורה 0 (או ללא החומר הנדון) ובנקודה ξ פעל מקור חום או חומר רגעי כאשר (לפי תנאי שפה) הטמפרטורה בקצוות היא 0 לאורך כל התהליך.

נשווה בין הפתרון הזה לפתרון של משוואת גלים שקיבלנו באותה שיטה.

ההבדל בין פתרון למשוואה חום ומשוואת גלים הוא שעבור משוואת גלים אמפליטודה של הגל העומד מבצעת תנודות ואילו במקרה של משוואת חום היא דועכת עם הזמן.

כזכור שתי המשוואות הן מקרים פרטיים של משוואת מברקן אשר מזניחים בה אחד מהגורמים. על כן את המעבר בין שני המקרים אפשר להבין על-ידי פתרון של משוואת מברקן (משוואת גלים עם חיכוך) תוך הגדלה של חיכוך ביחס למקדם אינרציה (מסה). כלומר, נדון במשוואה

$$\rho u_{tt}+\beta u_t=u_{xx},\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=w_0(x),\ \ 0<x<1,\ t>0,\ u(0,t)=u(1,t)=0$$

כאשר $\beta\to 0$ נקבל משוואת גלים, כאשר $\rho\to 0$ נקבל משוואת חום.

המשוואה עבור $T(t)$ המתקבלת ממשוואת המברקן היא

$$\rho T''+\beta T'+k^2\pi^2T=0 \qquad (*)$$

הערה. שימו לב שהמשוואה הזאת מתארת התנהגות של מתנד ליניארי עם חיכוך שדננו בה כאשר פיתחנו את המד"ח המתאר התנהגות של תנודות אורכיות בטווח אלסטי.

אשר פתרונה הוא צירוף ליניארי של שני פתרונות בסיסיים $e^{r_1t},\ e^{r_2t}$

כאשר r_1 ו- r_2 הם פתרונות של המשוואה האופיינית של (*)

$$\rho r^2+\beta r+k^2\pi^2=0 \ \ \Rightarrow\ \ r_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\rho k^2\pi^2}}{2\rho}$$

בהתאם לערכים של הפרמטרים השורשים עשויים להיות מספרים מרוכבים צמודים עם חלק משי שלילי או ממשיים שליליים.

נדון בשני מקרים קיצוניים כאשר אחד משני הפרמטרים המופיעים במשוואה (ρ ו-β) קטן בהרבה מהפרמטר השני.

א' נניח $\rho>>\beta$, בהנחה הזאת קיבלנו את משוואת גלים

$$r_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\rho k^2\pi^2}}{2\rho}\approx\frac{-\beta\pm\sqrt{-4\rho k^2\pi^2}}{2\rho}=\frac{-\beta\pm 2\sqrt{\rho}k\pi i}{2\rho}\approx\frac{\pm k\pi i}{\sqrt{\rho}}$$

אם $\rho=1$ נקבל

$$T(t) = a_k \sin k\pi t + b_k \cos k\pi t\ ,\ \ k = 1,2,...$$

כפי שאכן קיבלנו בפתרון של משוואת גלים.

ב׳ המקרה של משוואת חום מתקבל אם $\beta >> \rho$, נסמן $c=\rho/\beta <<1$, נקבל

$$r_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\rho k^2\pi^2}}{2\rho} = \frac{-\beta \pm \beta\sqrt{1 - ck^2\pi^2}}{2\rho} = \frac{1}{2c}\left[-1 \pm \sqrt{1 - 4ck^2\pi^2}\right]$$

התנהגות של פתרון תלויה ב יחס בין k ל-c:

עבור ערכי k קטנים נקבל $4ck^2\pi^2<<1$ ואז

$$r_{1,2} = \frac{1}{2c}\left[-1 \pm \sqrt{1 - 4ck^2\pi^2}\right] \approx \frac{1}{2c}\left[-1 \pm \left(1 - 2ck^2\pi^2\right)\right]$$

כך ש-

$$r_1 = -k^2\pi^2;\ \ r_2 = \frac{-1 + ck^2\pi^2}{c} \approx \frac{-1}{c}$$

לפי ההנחה $c<<1$, לכן $e^{r_2 t} = e^{-\frac{t}{c}}$ שואף ל- 0 מהר עם גידול של t ולכן הפתרון הזה זניח, על כן נשאר הפתרון האחר שמצאנו ישירות בפתרון של משוואת חום לעיל.

נראה התנהגות של הפתרון עבור k-ים גדולים אשר עבורם $4ck^2\pi^2>>1$. במקרה הזה נקבל

$$r_{1,2} = \frac{1}{2c}\left[-1 \pm \sqrt{1 - 4ck^2\pi^2}\right] \approx \frac{-1}{2c} \pm \frac{ik\pi}{\sqrt{c}}$$

כלומר עבור k-ים גדולים הפתרון דועך בקצב אחיד $e^{-\frac{t}{2c}}$ ושואף ל- 0 מהר עם גידול של t תוך תנודות עם תדירויות $k\pi/\sqrt{c}$. התופעה הזאת כמובן נעלמת כאשר מניחים מראש $\rho=c=0$ על כן לא גילינו אותה בפתרון של משוואת חום.

בעיית שפה\התחלה אי-הומוגנית עם תנאי שפה לא הומוגניים בקטע

השיטה לפתרון דומה לזו עבור משוואת גלים: עיקרון דואמל.

נדגים את הפתרון עבור קטע, אך השיטה הזאת מתאימה גם עבור ציר כולו וחצי ציר.

נדון בעיית Dirichlet

$$u_t=u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<1,\ u(0,t)=f_1(t),\ u(1,t)=f_2(t),\ \ u(x,0)=u_0(x),\ t>0$$

נפתור תחילה בעיית עזר שהיא פתרון משוואה אי-הומוגנית עם תנאי שפה ותנאי התחלה הומוגניים

$$v_t=v_{xx}+f(x,t),\ 0<x<1,\ v(0,t)=v(1,t)=0,\ \ u(x,0)=0,\ t>0$$

פתרון בעיית עזר. נחפש את הפתרון בצורה

$$v(x,t) = \int_0^t \rho(x,t,\tau)d\tau$$

כאשר ρ הוא פתרון של הבעיה

$$\rho_t=\rho_{xx},\ 0<x<1,\ \ \rho(0,t,\tau)=\rho(1,t,\tau)=0,\ \rho(x,\tau,\tau)=f(x,\tau)\ \ t>\tau$$

הוכחה של נכונות הפתרון הזה לבעיית העזר היא על-ידי הצבה ישירה.

הערה. עבור הבעיה בקטע אפשר למצוא פתרון גם באמצעות פיתוח של הפונקציה f לטור פורייה, אך השיטה הזאת לא תתאים עבור תחום אינסופי (כגון ציר או חצי ציר) ואילו הפתרון שהצגנו עובד בכל מקרה.

נחזור לבעיה עם תנאי שפה והתחלה אי-הומוגניים.

נחפש את הפתרון בצורה

$$u(x,t)=(1-x)f_1+xf_2+w(x,t)$$

המטרה של שני הגורמים הראשונים באגף ימין היא להתאים את הפתרון לתנאי שפה כך ש-w הוא פתרון של הבעיה עם תנאי שפה הומוגניים:

$$w_t=w_{xx}+f(x,t)-(1-x)f_1'-xf_2',\ w(0,t)=w(1,t)=0,\ w(x,0)=f(x,0)-(1-x)f_1(0)-xf_2(0)$$

נסמן

$$f^*=f(x,t)-(1-x)f_1'-xf_2';\ w_0=f(x,0)-(1-x)f_1(0)-xf_2(0)$$

במונחים האלה הבעיה עבור w היא כדלקמן

$$w_t=w_{xx}+f^*(x,t),\ w(0,t)=w(1,t)=0,\ w(x,0)=w_0(x)$$

את הפתרון של הבעיה הזאת נחפש כסכום של של פתרון של שתי בעיות

$$w=w_1+w_2$$

כאשר w_1 הוא פתרון של משוואה הומוגנית עם תנאי התחלה אי-הומוגני

$$w_{1t}=w_{1xx},\ w_1(0,t)=w_1(1,t)=0,\ w_1(x,0)=w_0(x)$$

ו-w_2 הוא פתרון של משוואה אי-הומוגנית עם תנאי התחלה הומוגני.

$$w_{2t}=w_{xx}+f^*,\ w_2(0,t)=w_2(1,t)=0,\ w_2(x,0)=0$$

אנו יודעים לפתור את שתי הבעיות האלה. על כן פתרנו את הבעיה הכללית.

דוגמה. נתונה בעיית שפה\התחלה על חצי ציר

$$u_t=\mathrm{D}u_{xx},\ u(x,0)=0,\ 0<x<\infty,\ t>0,\ u(0,t)=c$$

נמצא זמן $t=t_0$ שעבורו ערך הפתרון בנקודה $x=x_0$ שווה ל- $c/2$.

פתרון. קודם כל נבצע נרמול של הזמן כדי להיפתר מהמקדם:

$$\tau=\mathrm{D}t$$

נקבל

$$u_\tau=u_{xx},\ u(x,0)=0,\ 0<x<\infty,\ \tau>0,\ u(0,t)=c$$

נגדיר

$$u(x,t)=\mathrm{v}(x,t)+c$$

עבור v מתקיים

$$\mathrm{v}_\tau=\mathrm{v}_{xx},\ \mathrm{v}(x,0)=-c,\ 0<x<\infty,\ \tau>0,\ \mathrm{v}(0,t)=0$$

לבעיה הזאת יש לנו פתרון

$$\mathrm{v}(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}(-c)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\right]d\xi$$

את האינטגרל באגף ימין מחלקים לשני אינטגרלים ומחשבים כל אחד מהם על-ידי הצבות:

$$s_1=\frac{(\xi-x)}{2\sqrt{t}};\quad s_2=\frac{(\xi+x)}{2\sqrt{t}}$$

נקבל

$$\mathrm{v}(x,t)=-\frac{c}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\frac{-x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}2\sqrt{t}e^{-s_1^2}ds_1-\frac{c}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}2\sqrt{t}e^{-s_2^2}ds_2=-\frac{c}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{\frac{-x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-s_1^2}ds_1+\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-s_2^2}ds_2\right)$$

כדי לענות על השאלה יש לפתור משוואה

$$-\frac{c}{2}=-\frac{c}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{\frac{-x_0}{2\sqrt{t_0}}}^{\infty}e^{-s_1^2}ds_1+\int_{\frac{x_0}{2\sqrt{t_0}}}^{\infty}e^{-s_2^2}ds_2\right)\Rightarrow\int_{\frac{-x_0}{2\sqrt{t_0}}}^{\infty}e^{-s_1^2}ds_1+\int_{\frac{x_0}{2\sqrt{t_0}}}^{\infty}e^{-s_2^2}ds_2=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

כאשר הנעלם הוא t_0. את המשוואה הזאת פותרים בשיטה נומרית.

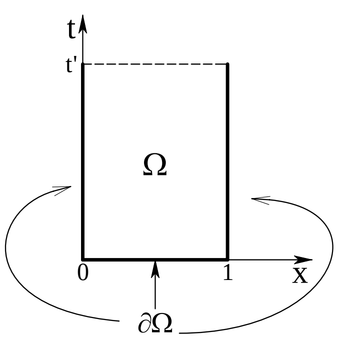
עיקרון המקסימום

נדון בבעיה בקטע

$$u_t=u_{xx},\ u(x,0)=u_0(x),\ 0<x<1,\ t>0,\ u(0,t)=f_1(t),\ u(1,t)=f_2(t)$$

כאשר מתקיים $f_1(0)=u_0(0)$, $f_2(0)=u_0(1)$.

מטרתנו להראות שפונקציה הפותרת את הבעיה הזאת מקבלת את הערך המקסימאלי או על השפה או כערך התחלתי, כלומר לא בתוך תחום הפתרון (אלא אם כן הפתרון הוא קבוע על כל התחום). הטענה הזאת נקראת **עיקרון המקסימום** עבור משוואת חום. (אותה טענה נכונה גם לגבי הערך המינימאלי.)



נבחר זמן כלשהו t', נקרא למלבן התוחם את הקטע $[0,1]$ בין הזמן 0 ל– t' Ω. נקראה לשפה של התחום מורכבת משלוש צלעות של המלבן (לא כולל את הצלע האופקי העליון) $\partial\Omega$.

נסמן

$$M=\max_{(x,t)\in\partial\Omega}u(x,t)$$

נוכיח את עיקרון המקסימום בדרך השלילה. נניח בשלילה לטענה שקיימת נקודה $(x_0,t_0)\in\Omega$ שבה הפונקציה u מקבלת ערך מקסימאלי: $u(x_0,t_0)=M+\varepsilon$ (כאשר M זה הערך המקסימאלי של הפונקציה על השפה).

במקרה כזה לגבי הנגזרות לפי x מתקיים

$$u_x(x_0,t_0)=0,\ u_{xx}(x_0,t_0)\le 0$$

ואילו לגבי נגזרת לפי t, אם $t_0<t'$ אז $u_t(x_0,t_0)=0$ ואם $t_0=t'$ אז $u_t(x_0,t_0)\ge 0$, כלומר בכל מקרה

$$u_t(x_0,t_0)\ge 0$$

בגלל המשוואה ש-u מקיימת האפשרות היחידה שיכולה להתקיים בנקודה (x_0,t_0) היא

$$u_t(x_0,t_0)=u_{xx}(x_0,t_0)=0$$

נגדיר פונקצית עזר

$$\mathrm{v}(x,y)=u(x,t)+k(t_0-t),\ k>0$$

לפי הגדרה של הפונקציה הזאת מתקיים

$$\mathrm{v}(x_0,t_0)=u(x_0,t_0)=M+\varepsilon,\ \mathrm{v}|_{\partial\Omega}=u|_{\partial\Omega}+k(t_0-t);\ |k(t_0-t)|<kt'$$

נבחר $k=\varepsilon/2t'$. אז

$$\mathrm{v}|_{\partial\Omega}=u|_{\partial\Omega}+k(t_0-t)\le M+\varepsilon/2$$

על כן עבור הפונקציה v מתקיים גם כן שהערך שלה בנקודה (x_0,t_0) גדול מהמקסימום על השפה:

$$\mathrm{v}(x_0,t_0)=M+\varepsilon>M+\varepsilon/2$$

מכיוון ש- v פונקציה רציפה, היא מקבלת ערך מקסימאלי בנקודה כלשהי בתוך התחום Ω או על השפה שלו. את האפשרות השנייה שללנו, על כן קיימת נקודה $(x_1,t_1)\in\Omega$ כך שבה בה הפונקציה v מקבלת ערך מקסימאלי. אז בנקודה הזאת מתקיים

$$\mathrm{v}_x(x_1,t_1)=0,\ \mathrm{v}_{xx}(x_1,t_1)\le 0,\ \mathrm{v}_t(x_1,t_1)\ge 0$$

באותה נקודה עבור u מתקיים

$$u_{xx}(x_1,t_1)=\mathrm{v}_{xx}(x_1,t_1)\le 0,\ u_t(x_1,t_1)=\mathrm{v}_t(x_1,t_1)-\varepsilon/2t'\ge 0$$

כלומר בנקודה הזאת u לא מקיימת את המשוואה $u_t=u_{xx}$ כי

$$u_t(x_1,t_1)\ge\varepsilon/2t'>0 \text{ AND } u_{xx}(x_1,t_1)\le 0$$

הגענו למסקנה שבנקודה (x_1,t_1) משוואת חום לא מתקיימת, בסתירה להנחה ש-u היא פתרון של משוואת חום בתחום Ω.

הערות.

א׳ באותה הדרך אפשר להוכיח שבתוך Ω לא קיים מינימום של u.

ב׳ הוכחנו עיקרון המקסימום החלש אשר קובע שמקסימום מבודד לא יכול להתקיים בתוך התחום. עדיין קיימת אפשרות שמקסימום מתקבל בתת-תחום שלם בתוך Ω. השלילה של האפשרות הזאת נקראת עיקרון המקסימום החזק. לא נוכיח את העיקרון הזה.

שימושים בעיקרון מקסימום

א׳ נשתמש בעיקרון מקסימום כדי להוכיח יחידות פתרון של בעיית Dirichlet.

הוכחה היא בדרך השלילה. נניח קיימים שני פתרונות שונים u_1 ו- u_2. נגדיר $\mathrm{v}=u_2-u_1$. הפונקציה v פותרת משוואת חום עם תנאי שפה והתחלה הומוגניים:

$$v_t=v_{xx},\ v(0,t)=v(1,t)=0,\ v(x,0)=0$$

לפי הנתון, ערך של v על השפה הוא 0 (ובפרט הערך המקסימאלי שלה הוא 0), לכן לפי עיקרון המקסימום $v\equiv 0$ בכל תחום Ω.

הערה. ההוכחה הזאת שרירה גם עבור u הפותרת משוואת חום לא הומוגנית.

ב׳ משפט השוואה

נדון בשתי בעיות שפה\התחלה <u>שונות</u> מאותו סוג במקביל

$$u_{1t}=u_{1xx},\ u_1(x,0)=u_{10}(x),\ 0<x<1,\ t>0,\ u_1(0,t)=f_{11}(t),\ u_1(1,t)=f_{12}(t)$$

$$u_{2t}=u_{xx},\ u_2(x,0)=u_{20}(x),\ 0<x<1,\ t>0,\ u_2(0,t)=f_{21}(t),\ u_2(1,t)=f_{22}(t)$$

כך שעל $\partial\Omega$ $u_1\leq u_2$, כלומר מתקיים

$$u_1(x,0)\leq u_2(x,0),\ \ u_1(0,t)\leq u_2(0,t),\ \ u_1(1,t)\leq u_2(1,t)$$

אז בכל התחום Ω מתקיים אי–שוויון <u>חזק</u>

$$u_1(x,t)<u_2(x,t)$$

הוכחה. נדון ב– $v=u_1-u_2$. הפונקציה v לא יכולה לקבל ערך חיובי על השפה, כלומר המקסימום שלה על השפה מוגבל מלמעלה על–ידי 0 ולא שווה ל–0 באופן זהותי כי הרי לפי הנתון u_1 ו– u_2 פותרות בעיות שפה\התחלה שונות. לפי עיקרון המקסימום בתוך התחום הפונקציה v לא יכולה לקבל ערך מקסימאלי ולכן היא שלילית בתוך התחום הזה.

ג׳ משפט היציבות.

אם על $\partial\Omega$ מתקיים

$$|u_2(x,t)-u_1(x,t)|<\varepsilon$$

אז האי–שוויון הזה מתקיים בכל התחום Ω.

הוכחה. נדון בשלוש בעיות שפה\התחלה שהפתרונות שלהן

$$v_1(x,t)=u_2(x,t)-u_1(x,t);\ v_2(x,t)=\varepsilon;\ \ v_3(x,t)=-\varepsilon$$

הטענה מתקבלת באופן מיידי לפי משפט השוואה.

ד׳ יחידות של פתרון בעיית התחלה על ציר אינסופי .

טענה. אם u_0 היא פונקציה חסומה אז לבעיית התחלה עבור משוואה חום חד–ממדית קיים פתרון יחיד.

הוכחה. יהיו u_1 ו– u_2 שני פתרונות של אותה בעיית התחלה. נניח שהפתרונות חסומים, כלומר קיים $M>0$ כך שעבור כל $-\infty<x<\infty$ וכל $t>0$ הפתרונות חסומים מלמעלה על–יד M. נגדיר

$$v=u_2-u_1,\ v(x,0)=0$$

מתקיים

$$|v(x,t)|=|u_2(x,t)-u_1(x,t)|\leq|u_2(x,t)|-|u_1(x,t)|\leq 2M$$

בניגוד למקרה של קטע כאן אי-אפשר להשתמש ישירות בעיקרון המקסימום כי התחום לא חסום והפונקציה עשויה להשתנות בלי להגיע לערך מקסימאלי. נראה שבהינתן נקודה שרירותית (x_0,t_0) ומספר שרירותי $\varepsilon>0$ מתקיים $|v(x_0,t_0)|<\varepsilon$. נחלק את ההוכחה לשני חלקים

1) $v(x_0,t_0)<\varepsilon$; 2) $v(x_0,t_0)>-\varepsilon$.

1)

נבחר ערך $L>0$ כך ש- $|x_0|<L$ ונדון בתחום $|x|\le L$.

נשים לב שהפונקציה

$$V(x,t)=\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+t\right)$$

פותרת את משוואת החום (אפשר להיווכח בזה על-ידי הצבתה בתוך המשוואה). בנוסף $V(\pm L,t)\ge 2M$. ובכן נתקיים

$$V(x,0)>v(x,0)=0;\quad V(\pm L,t)\ge 2M\ge v(\pm L,t)$$

לכן לפי עיקרון המקסימום בתחום $|x|\le L$ מתקיים

$$v(x,t)\le\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+t\right)$$

בהינתן $\varepsilon>0$ ונקודה (x_0,t_0) נבחר

$$L>\sqrt{\frac{4M}{\varepsilon}\left(\frac{x_0^2}{2}+t_0\right)}$$

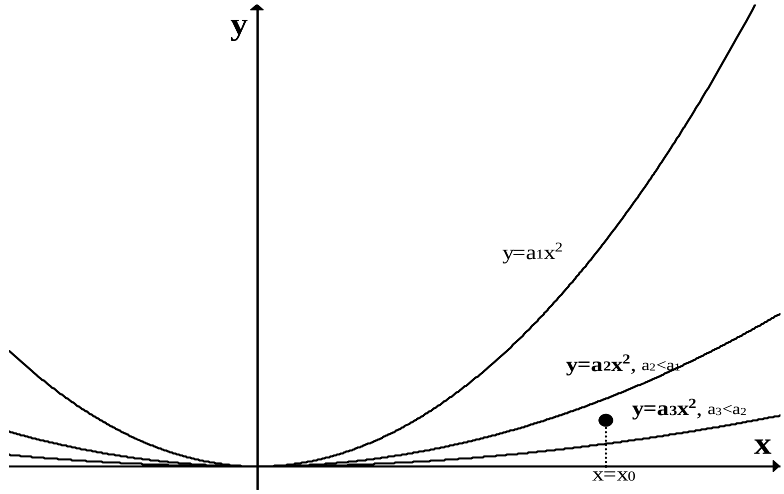
נקבל $v(x_0,t_0)<\varepsilon$. מש"ל

2) הוכחה זהה (במקום עיקרון המקסימום יש להשתמש בעיקרון המינימום).

הערות.

א' התוצאה הזאת נובעת מהתכונה הבאה של פרבולה:

אם נתייחס למשפחה של פרבולות $y=ax^2$ ונקבע את x, אז עבור כל $\varepsilon>0$ אפשר למצוא a כך ש- $|y|<\varepsilon$ (ראה איור).



ב׳ שימו לב שבהוכחה לא היינו זקוקים להשתמש בצורת הפתרון שמצאנו קודם.

ג׳ למעשה הדרישה ש- u_0 היא פונקציה חסומה היא דרישה חמורה מדי. נביא ללא הוכחה משפט מקל יותר על התנהגות של u_0. לבעיית התחלה עבור משוואת חום חד-ממדית קיים פתרון יחיד אם קיימים קבועים c ו- $\alpha>0$ כך שכאשר $|x|\to\infty$ מתקיים $|u_0(x)|<ce^{\alpha x^2}$.

אי-שוויונים ריבועיים

נפתח סדרה של אי-שוויונים שימושיים התקפים עבור בעיית שפה\התחלה מסוג כלשהו על קטע.

1) נכפיל את משוואת חום ב- u ונבצע אינטגרציה מ- 0 עד 1:

$$\int_0^1 uu_t dx = \int_0^1 uu_{xx} dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 (u^2)_t\, dx = \int_0^1 uu_{xx} dx$$

באגף שמאל אפשר להחליף סדר של גזירה ואינטגרציה (כי הגזירה היא לפי t ואינטגרציה לפי x); את האינטגרציה של אגף ימין נבצע לפי חלקים, נקבל

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 u^2 dx\right) = \underset{\underset{0}{|||}}{uu_x}\Big|_1^0 - \int_0^1 (u^2)_x\, dx \le 0$$

קיבלנו פונקציה אי-שלילית של זמן $\int_0^1 u^2 dx$ שלא יכולה לגדול. הפונקציה הזאת קטנה כל עוד u איננו קבוע זהותי כפונקציה של x .

2) נכפיל את משוואת חום ב- u_{xx} ונבצע אינטגרציה מ- 0 עד 1:

$$\int_0^1 u_{xx}u_t dx = \int_0^1 u_{xx}^2 dx$$

נבצע אינטגרציה של אגף שמאל לפי חלקים, נקבל

$$\int_0^1 u_{xx}u_t dx = u_x u_t\Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{2}\int_0^1 (u_x^2)_t\, dx = u_x u_t\Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{2}\frac{d}{d}\left(\int_0^1 u_x^2 dx\right)$$

אם בקצה מתקיים תנאי Neumann אז באותו קצה $u_x=0$; אם בקצה מתקיים תנאי Dirichlet אז באותו קצה $u_t=0$, על כן בכל מקרה הגורם הראשון באגף ימין מתאפס. ובכן קיבלנו

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d}\left(\int_0^1 u_x^2 dx\right) = -\int_0^1 u_{xx}^2 dx \le 0$$

קיבלנו פונקציה אי–שלילית של זמן $\int_0^1 u_{xx}^2 dx$ שלא יכולה לגדול. הפונקציה הזאת קטנה כל עוד u איננו פונקציה ליניארית של x .

3) בדרך דומה אפשר לקבל שעבור כל n מתקיים

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d}\left(\int_0^1 \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)^2 dx\right) \le 0$$

נשתמש באי–שוויון הראשון כדי להוכיח יחידות הפתרון של בעיית Neumann. במקרה הזה פונקצית ההפרש בין שני פתרונות v מקיימת

$$\mathrm{v}_t=\mathrm{v}_{xx},\ \mathrm{v}(x,0)=0,\ 0<x<1,\ t>0,\ \mathrm{v}_x(0,t)=0,\ \mathrm{v}_x(1,t)=0$$

מהאי–שוויון הריבועי הראשון נקבל שהנגזרת של v לא עולה, לכן היא שווה לאפס באופן זהותי. על כן

$$\int_0^1 \mathrm{v}^2(x,t)dx = 0 \Rightarrow \mathrm{v}^2(x,t) = 0 \Rightarrow \mathrm{v}(x,t) = 0$$

אסימפטוטיקה של פתרונות של משוואת חום לזמנים ארוכים

א׳ בעיית התחלה

נחזור להנחה שהנחנו בדיון על מומנטים: עבור כל $\alpha>0$ כאשר $|x|\to\infty$ קיים קבוע $c>0$ כך ש–

$$|u_0(x)| < ce^{-\alpha x}$$

ונשאל איך מתנהג הפתרון כאשר $t\to\infty$. הרי ראינו שהמסה מתפזרת על כל הציר, לכן, עם הזמן, בכל נקודה הפתרון שואף לאפס. נראה את ההתנהגות הזאת בצורה מדויקת יותר (כלומר באיזה אופן הפתרון שואף לאפס).

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)e^{-\frac{2x\xi-\xi^2}{4t}}d\xi$$

או

$$(\$)\qquad 2\sqrt{\pi t}u(x,t)e^{\frac{x^2}{4t}} = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)e^{-\frac{2x\xi-\xi^2}{4t}}d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\left(1+\frac{2x\xi-\xi^2}{4t}+\ldots\right)d\xi$$

באינטגרל מצד ימין של ($) יופיעו מומנטים של תנאי התחלה מכל הסדרים.

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\left(M_0 + \frac{xM_1(0)}{2t} - \frac{M_2(0)}{4t} + O(t^{-2})\right)$$

אם נשאיר רק את האיבר הראשון בסכום באגף ימין, נקבל פתרון לבעיית התחלה כאשר כל החומר (מסה M_0) בהתחלה מרוכז בנקודה אחת. האיברים הנוספים בסכום הזה נותנים תיקונים לפתרון הזה הנובעים מהפיזור ההתחלתי של המסה. כפי שרואים מהמשוואה שקיבלנו התיקונים האלה דועכים עם הזמן (הרי בכולם t מופיע במכנה). ובכן אם מדובר בכמות סופית של החומר אז עבור זמן גדול מספיק ההתפלגות ההתחלתית של החומר לא חשובה והפתרון דומה (שואף) לזה שהיה מתקבל כאשר כל החומר בהתחלה מרוכז בנקודה אחת המזוהה עם מרכז הכובד של המסה במשך כל התהליך.

ב׳ בעיית שפה\התחלה בקטע

יש הבדל מהותי בתכונות הפתרון האסימפטוטי בין בעיית Dirichlet ובעיית Neumann.

א׳ בעיית Dirichlet

$$u_t=u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<1,\ u(0,t)=f_1(t),\ u(1,t)=f_2(t),\ \ u(x,0)=u_0(x),\ t>0$$

מסתבר שאם קיימים הגבולות

$$\lim_{t\to\infty} f(x,t)=F(x);\ \ \lim_{t\to\infty} f_1(t)=F_1\ ;\ \ \lim_{t\to\infty} f_2(t)=F_2$$

אז

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)=U(x)$$

כאשר הפונקציה U היא פתרון של המד״ר

$$U''+F(x)=0,\ U(0)=F_1,\ U(1)=F_2$$

שימו לב: הפתרון האסימפטוטי לא תלוי בתנאי ההתחלה.

ב׳ בעיית Neumann

$$u_t=u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<1,\ u_x(0,t)=f_1(t),\ u_x(1,t)=f_2(t),\ \ u(x,0)=u_0(x),\ t>0$$

מסתבר שבמקרה הזה הפתרון האסימפטוטי תלוי בתנאי התחלה ובמאזן כולל של מסה (אם זה פירוש של u) בכל הזמנים. ליתר פירוט, נדרוש בנוסף לקיום הגבולות

$$\lim_{t\to\infty} f(x,t)=F(x);\ \ \lim_{t\to\infty} f_1(t)=F_1;\ \ \lim_{t\to\infty} f_2(t)=F_2$$

גם

$$\int_0^\infty\left[f_2(t)-f_1(t)+\int_0^1 f(x,t)dx\right]dt=M<\infty$$

הערה. התנאי הנוסף אומר שהפרש של השטפים דרך השפה שווה לכמות המסה שנכנסת למערכת. כי הרי, כדי שיתקיים פתרון שלא משתנה בזמן דרוש המאזן הזה: אין מקורות (חיוביים או שליליים של המסה בתוך תחום הפתרון).

בתנאים האלה מתקיים

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)=U(x)$$

כאשר הפונקציה U היא פתרון של המד״ר

$$U''+F(x)=0,\ U'(0)=F_1,\ U'(1)=F_2 \qquad (*)$$

בהצגה של הפונקציה U מופיע קבוע אינטגרציה A התלוי בפונקצית התחלה u_0 וקבוע M, כי הרי

$$U'(x)=-\int_0^x F(s)dsc \Rightarrow U(x)=-\int_0^x dz\int_0^z F(s)ds+F_1x+A \qquad (**)$$

נחשב את הקבוע A. נגדיר

$$M(t)=\int_0^1 u(x,t)dx$$

המשמעות של M היא המסה הכוללת בזמן t. נבצע אינטגרציה על משוואת חום ובמונחים של M נקבל

$$M'(t)=f_2(t)-f_1(t)+\int_0^1 f(x,t)dx \Rightarrow M(t)=M(0)+\int_0^t\left[f_2(s)-f_1(s)+\int_0^1 f(x,s)dx\right]ds$$

כאשר t שואף לאינסוף מקבלים

$$M=M(0)+\int_0^\infty\left[f_2(t)-f_1(t)+\int_0^1 f(x,t)dx\right]dt=\int_0^1 U(x)dx$$

מכאן ומ– (**) נקבל את A:

$$\int_0^1 U(x)dx=A+\frac{F_1}{2}-\int_0^1 dx\left(\int_0^x dz\int_0^z F(s)ds\right)=M(0)+\int_0^t\left[f_2(s)-f_1(s)+\int_0^1 f(x,s)dx\right]ds$$