



נא לפתור את כל השאלות הנתונות. כל שאלה שווה ל- 25 נקודות.
פתרון לכל שאלה רשמו במקום מיועד לכך בלבד. לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).

בהצלחה !

שאלה מס' 1. פתרו את הבעיה הבאה

$$y' + \frac{x^2 + y^2}{xy} = 0, \quad y(1) = 1.$$

$$y = z(x)x$$

$$xz' + z + \frac{1+z^2}{z} = 0$$

$$xz z' + 2z^2 + 1 = 0$$

$$\frac{x}{2} \frac{dz^2}{dx} = -(2z^2 + 1)$$

$$\frac{dz^2}{2z^2 + 1} = -\frac{2}{x}$$

$$\frac{1}{2} \ln(2z^2 + 1) = -2 \ln x + C$$

$$x^4 (2z^2 + 1) = 2C$$

$$x^2 (2y^2 + x^2) = 2C$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{2}$$

$$\underline{x^2 (2y^2 + x^2) = 3} \quad \text{: הרישוי}$$

שאלה מס' 2. מצאו את הפתרון הכללי של משוואה

$$dx - \left(xy - x^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \right) dy = 0$$

1) $y = c$
 /1111111111

2) $\frac{dx}{dy} - xy = -x^2 e^{-\frac{y^2}{2}}$
 'סוואל און און

$x = 0$

$$z = \frac{1}{x} - \frac{dz}{dy} = yz = -e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\frac{dz}{dy} + yz = e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\tilde{z} = C e^{-\int y dy} = C e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$z = C(y) e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$C'(y) e^{-\frac{y^2}{2}} = e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$C'(y) = 1 \quad C(y) = y + C_0$$

$$z = \frac{1}{x} = (y + C_0) e^{-\frac{y^2}{2}}$$

: 111111

$$\frac{1}{x} = (y + C_0) e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$x = 0 \wedge \infty$

שאלה מס' 3. פתרו את הבעיה הבאה:

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{2}e^x\sqrt{x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$$

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'xe^x = 0 \\ C_1'e^x + C_2'(x+1)e^x = \frac{1}{2}e^x\sqrt{x} \end{cases}$$

$$C_2'e^x = \frac{1}{2}e^x\sqrt{x} \Rightarrow C_2' = \frac{\sqrt{x}}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3}x^{3/2} + C_{20}$$

$$C_1' = -xC_2' = -\frac{x^{3/2}}{2}$$

$$C_1 = -\frac{1}{5}x^{5/2} + C_{10}$$

$$y = \left(\frac{x^{3/2}}{3} + C_{20}\right)xe^x + \left(-\frac{1}{5}x^{5/2} + C_{10}\right)e^x =$$

$$= \left(\frac{x^{5/2}}{3} - \frac{x^{5/2}}{5}\right)e^x + C_{10}e^x + C_{20}xe^x =$$

$$= \frac{2}{15}x^{5/2}e^x + C_{10}e^x + C_{20}xe^x$$

$$y(0) = 0 = C_{10} \Rightarrow y = \frac{2}{15}x^{5/2} + C_{20}xe^x$$

$$y'(0) = \frac{1}{3}x^{3/2} + C_{20}(x+1)e^x \Big|_{x=0} = C_{20} = 1$$

$$\underline{y = \frac{2}{15}x^{5/2} + xe^x}$$

:תשובה

שאלה מס' 4. מצאו פתרון כללי של מערכת

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y + te^t \end{cases}$$

$$x'' = 2x' + y' = 2x' + 3x + 4y + te^t$$

$$\boxed{y = x' - 2x}$$

$$x'' = 2x' + 3x + 4x' - 8x + te^t$$

$$x'' - 6x' + 5x = te^t$$

$$z^2 - 6z + 5 = 0 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 5$$

$$\tilde{x} = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$$

מקור כדור של הומוג'ן:

$$x_0 = t(At + B)e^t = (At^2 + Bt)e^t$$

$$x_0' = (2At + B + At^2 + Bt)e^t$$

$$x_0'' = (2A + 2At + B + 2At + B + At^2 + Bt)e^t$$

$$\begin{array}{l} t^2 e^t \\ t e^t \\ e^t \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A - 6A + 5A = 0 \\ 4A + B - 6(2A + B) + 5B = 1 \\ 2A + 2B - 6B = 0 \end{array} \right.$$

$$-8A = 1$$

$$A = -\frac{1}{8}$$

$$4B = 2A$$

$$B = -\frac{1}{16}$$

$$\boxed{x = t \left(-\frac{t}{8} - \frac{1}{16} \right) e^t + C_1 e^t + C_2 e^{5t}}$$

$$\boxed{y = x' - 2x = \dots}$$