201-1-0101
משוואות דיפרנציאליות חלקיות

IV

משוואות חום

מצא פתרונות לבעיות הבאות:

.1

$$u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$$

תשובה: $u(x,t) = \frac{1}{2} erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - erf\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2}$

.2

$$u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

תשובה: $u(x,t) = \frac{1}{2}\left(erf\left(\frac{1+x}{2\sqrt{t}}\right) + erf\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right)\right)$

.3

$$u_t = u_{xx}, \ 0 < x < \infty, \ t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$u(0,t) = 0$$

תשובה: $u(x,t) = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2} erf\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2} erf\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)$

.4

$$u_t = u_{xx} - u, \ -\infty < x < \infty, \ t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

חשב: $\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)\,dx$

תשובה: $\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx = e^{-2t} \frac{1}{2^{3/2}\sqrt{\pi t}}$

.5

$$u_t = u_{xx}\,,\ -\infty < x < \infty\,,\ t > 0$$
$$u(x,0) = e^{-x^2}$$

<u>פתרון</u> :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{-4ts^2-s^2+2xs}{4t}}ds =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4t}\left[\left(s\sqrt{1+4t}-\frac{x}{\sqrt{1+4t}}\right)^2-\frac{x^2}{1+4t}\right]}ds =$$

$$= \sqrt{\pi}\,\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\,\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1+4t}}e^{\frac{x^2}{4t(1+4t)}} = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{x^2}{1+4t}}$$

.6

$$u_t = u_{xx}\,,\quad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u(x,0) = 3\sin 4\pi x$$
$$u(0,t) = 0,\quad u(1,t) = 0$$

<u>תשובה</u> : $u(x,t) = 3e^{-16\pi^2 t}\sin(4\pi x)$

.7

$$u_t = u_{xx}\quad ,\ 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u(x,0) = x$$
$$u_x(0,t) = 0,\quad u_x(1,t) = 0$$

<u>תשובה</u> : $u(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}e^{-k^2\pi^2 t}\cos k\pi x$

.8 $u(x,t)$ הוא פתרון לבעיה הבאה

$$u_t = u_{xx} + 10u\qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u(x,0) = h(x)$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

עבור איזה פונקציה $h(x)$ קיים גבול סופי $\lim_{t\to\infty} u(x,t) < \infty$?

<u>תשובה</u> : עבור כל פונקציה $h(x)$ המקיימת את התנאי $\int_0^1 h(x)\sin\pi x dx = 0$

.9 $u(x,t)$ הוא פתרון לבעיה

$$u_t = u_{xx} + 1 + \sin \pi x \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u(x,0) = \sin \pi x$$
$$u(0,t) = u(1,t) = t$$

חשב: $\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^1 u_x^2(x,t)\ dx = ?$

תשובה: $\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx = \dfrac{1}{2\pi^2}$

.10 $u(x,t)$ הוא פתרון לבעיה

$$u_t = u_{xx} - u_x \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u(x,0) = 1$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

חשב: $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\int_0^1 u_t^2(x,t)dx}{\int_0^1 u_x^2(x,t)dx} = ?$

<u>פתרון</u>: מחפשים בצורה

$$u(x,t) = v(x,t)e^{\alpha x + \beta t}$$

עבור $\alpha = \dfrac{1}{2},\ \beta = -\dfrac{1}{4}$ מקבלים $u(x,t) = v(x,t)e^{\frac{x}{2}-\frac{t}{4}}$

כאשר $v(x,t)$ פתרון לבעיה

$$v_t = v_{xx} \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$v(x,0) = e^{-\frac{x}{2}}$$
$$v(0,t) = 0, v(1,t) = 0$$

לפי הפרדת המשתנים

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x$$

כאשר

$$c_n = 2\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}} \sin \pi n x dx$$

$$, \ u(x,t)=\sum_{1}^{\infty} c_n e^{\frac{x}{2}-t\cdot\left(\frac{1}{4}+\pi^2 n^2\right)}\sin\pi x$$

אם $t\to\infty$ אז $u(x,t)\to 0$

עבור $t\to\infty$

$$u(x,t)\approx c_1 e^{\frac{x}{2}-t\cdot\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)}\sin\pi x$$

$$u_x(x,t)\approx c_1 e^{\frac{x}{2}-t\cdot\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)}\left(\frac{\sin\pi x}{2}+\pi\cos\pi x\right)$$

$$u_x^{\ 2}(x,t)\approx c_1 e^{x-t\cdot\left(\frac{1}{2}+2\pi^2\right)}\left(\frac{\sin\pi x}{2}+\pi\cos\pi x\right)^2$$

$$u_t(x,t)\approx-\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)c_1 e^{\frac{x}{2}-t\cdot\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)}\sin\pi x$$

$$u_t^{\ 2}(x,t)\approx\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)^2 c_1^{\ 2} e^{x-t\cdot\left(\frac{1}{2}+2\pi^2\right)}\sin^2\pi x$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^1 u_t^2(x,t)}{\int_0^1 u_x^2(x,t)}=\frac{\int_0^1 e^x\left(\frac{\sin\pi x}{2}+\pi\cos\pi x\right)^2 dx}{\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)^2\int_0^1 e^x\sin^2\pi x dx}=\frac{-4\pi^4+7\pi^2+2}{\pi^2(1+4\pi^2)}$$

.11 $u(x,t)$ הוא פתרון לבעיה

$$u_t=u_{xx}\quad 0<x<1,\ t>0$$
$$u(x,0)=x^2$$
$$u(0,t)=0,\ u(1,t)=1$$

חשב: $sign\left[u_t\left(\frac{1}{2},10\right)\right]=\ ?$

<u>פתרון</u>:
למשוואת חום ליניארית נגזרת של הפתרון לפי כל אחד מהמשתנים גם מהווה פתרון.
נגדיר פונקציה

$$u_t(x,t)=v(x,t)$$

גוזרים לפי t את המשוואה הנתונה

$$(u_t)_t=(u_t)_{xx}\Leftarrow(u_t)_t=(u_{xx})_t\Leftarrow u_t=u_{xx}$$

מקבלים בעיית שפה-התחלה הבאה

$$v_t=v_{xx},\ 0<x<1,\ t>0$$
$$v(0,t)=v(1,t)=0$$
$$v(x,0)=2$$

לפי עקרון המקסימום $v(x,t)>0$, ז"א $sign\left[u_t\left(\frac{1}{2},10\right)\right]=sign\left[v\left(\frac{1}{2},10\right)\right]=1$

12. $u(x,t)$ ו- $v(x,t)$ הם פתרונות לבעיות שפה-התחלה הבאות

$$u_t=u_{xx}+e^{-t}\sin^2 x+1 \qquad 0<x<1,\ t>0 \qquad v_t=v_{xx}-e^{-t}\cos^2 x$$

$$u(x,0)=\left(1+x^2\right)x \qquad v(x,0)=2x^2$$

$$u(0,t)=e^{-t},\ u(1,t)=e^{-2t} \qquad v(0,t)=e^{-t},v(1,t)=e^{-2t}$$

$$u\left(\frac{1}{2},10\right)>?<v\left(\frac{1}{2},10\right)$$

<u>תשובה</u>: $u\left(\frac{1}{2},10\right)>v\left(\frac{1}{2},10\right)$