אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה: 29.02.12
שם המרצה: פרופ' ל. פריגוזין
שם הקורס: <u>מבוא למשוואות דיפרנציאליות להנדסת חומרים</u>
מס' הקורס: 0201.1.9171
שנה: 2011 סמסטר: א' מועד: ב'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות (משני צדדים), מחשבון עם צג קטן

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות (משקל של כל שאלה שווה ל-25 נקודות)
ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד.
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).

בהצלחה!

שאלה 1. מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה:

$$y^{(6)}+6y^{(3)}+9y=x^2+\sin x$$

$r^6+6r^3+9=0 \qquad r^3=-3=3e^{i\pi}$

$(r^3+3)^2=0$

$r_1=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

$r_2=\sqrt[3]{3}\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-\sqrt[3]{3}$

$r_3=r_1^{*}=\sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

כל שורש בעל ריבוי 2. נסמן: $a=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$, $b=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\sqrt{3}$

פתרון של משוואה הומוגנית:

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{y}&=C_1e^{ax}\cos bx+C_2e^{ax}\sin bx+C_3e^{-\sqrt[3]{3}x}+\\&+C_4xe^{ax}\cos bx+C_5xe^{ax}\sin bx+C_6xe^{-\sqrt[3]{3}x}\end{aligned}}$$

(משוואת מקדמים)

$\hat{y}_1=\alpha x^2+\beta x+c \Longrightarrow \boxed{\hat{y}_1=\frac{1}{9}x^2}$

$\hat{y}_2=A\sin x+B\cos x, \quad \hat{y}_2''=-A\sin x-B\cos x,$

$\hat{y}_2'''=-A\cos x+B\sin x, \quad \hat{y}_2^{(5)}=A\cos x-B\sin x$

$\hat{y}_2^{(6)}=-A\sin x-B\cos x$

$$\begin{array}{l|l}\sin x & -A+6B+9A=1\\ \cos x & -B-6A+9B=0\end{array}\Bigg\}\Longrightarrow \begin{array}{l}A=\frac{2}{25}\\ B=\frac{3}{50}\end{array}$$

$\boxed{\hat{y}_2=\frac{2}{25}\sin x+\frac{3}{50}\cos x}$

תשובה: $y=\tilde{y}+\hat{y}_1+\hat{y}_2$

שאלה 2. פתרו את המשוואה הבאה

$$x^2y''-3xy'+4y=x^2\ln x$$

עם תנאי ההתחלה $y(1)=0,\quad y'(1)=2$.

$r(r-1)-3r+4=0$

$r^2-4r+4=0 \qquad r_1=r_2=2$

פתרון של מ. הומוגנית:

$\tilde{x}=C_1x^2+C_2x^2\ln x \qquad (x>0)$

שיטת וריאציה!

$\bar{x}=C_1(x)\,x^2+C_2(x)\,x^2\ln x$

$1\cdot y''-\frac{3}{x}y'+\frac{4}{x^2}y=\underbrace{\ln x}_{f(x)}.$

$$\begin{cases} C_1'x^2+C_2'x^2\ln x=0 \\ C_1'2x+C_2'(2x\ln x+x)=\ln x \end{cases}$$

$C_1'=-C_2'\ln x$

$C_2'+C_2'(\ln x+\frac{1}{2})=\frac{\ln x}{2x}$

$C_2'=\frac{\ln x}{x} \qquad C_2=\int\frac{\ln x}{x}dx=\frac{\ln^2 x}{2}+C_{20}$

$C_1'=-\frac{\ln^2 x}{x} \qquad C_1=-\int\frac{\ln^2 x}{x}dx=-\frac{\ln^3 x}{3}+C_{10}$

$y=-x^2\frac{\ln^3 x}{3}+\frac{x^2\ln^3 x}{2}+C_{10}x^2+C_{20}x^2\ln x$

$y(1)=C_{10}=0$

$y'(x)=\frac{5}{6}\left(-2x\ln^3 x+3x^2\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}\right)+2C_{10}x+C_{20}(2x\ln x+x)$

$y'(1)=2C_{10}+C_{20}=2 \Rightarrow C_{20}=2$

תשובה:

$y=\frac{1}{6}x^2\ln^3 x+2x^2\ln x$

שאלה 3.

א) (15 נק') מצאו פתרון של בעיית תנאי ההתחלה

$$yy''-(y')^2=y^2y',\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=2$$

$$y'=p,\quad y''=p\frac{dp}{dy}$$

$$py\frac{dp}{dy}-p^2=y^2p$$

1) $p=0 \to y=C$
לא מקיים תנאי התחלה

2) $\frac{dp}{dy}-\frac{p}{y}=y$

$$p=Ce^{\int\frac{dy}{y}}=Cy\qquad (y>0).$$

$$C'y=y\qquad C'=1\qquad C=y+C_0$$

$$p=\frac{dy}{dx}=y(y+C_0).$$

$$t=0 \Rightarrow y'(0)=y(0)(y(0)+C_0)$$

$$2=1(1+C_0)\Rightarrow C_0=1.$$

$$\frac{dy}{dx}-y=y^2$$ משוואת ברנולי

$$y^{-2}y'-y^{-1}=1\qquad u=y^{-1}\qquad (y=0 \text{ לא מתאים})$$

$$-u'-u=1\qquad u'+u=-1.$$

$$u=C_1e^{-t}-1\qquad \frac{1}{y}=C_1e^{-t}-1.$$

$$t=0\Rightarrow 1=C_1-1\qquad C_1=2$$

תשובה:

$$y=\frac{1}{2e^{-t}-1}.$$

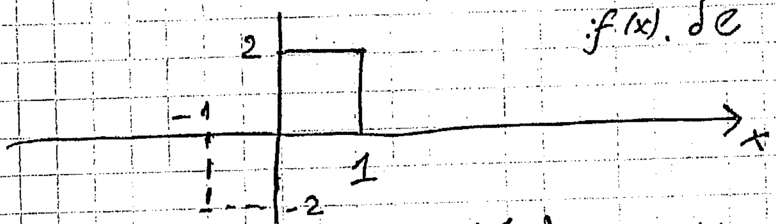
ב) (10 נק') פתרו את הבעייה הבאה על חצי ציר

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} - 2u, & 0 < x < \infty,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & u(x,0) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$u = ve^{-2t}$$

$$\begin{cases} v_t = 3v_{xx} \\ v(0,t) = 0 \qquad v(x,0) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \end{cases} = f \end{cases}$$

המשך אי-זוגי של $f(x)$:



$$v(x,t) = -2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\frac{x+1}{\sqrt{12t}}\right) + 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\frac{x}{\sqrt{12t}}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\frac{x-1}{\sqrt{12t}}\right)$$

$$u(x,t) = e^{-2t}\left[-\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{3t}}\right) + 2\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{3t}} - \operatorname{erf}\frac{x-1}{2\sqrt{3t}}\right]$$

שאלה 4. פתרו את הבעיה הבאה:

$$u_t = u_{xx}, \qquad 0 < x < 1, t > 0$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(1,t) = e^{-t/4}$$

$$u(x,0) = x + 1$$

$$u = v + e^{-\frac{t}{4}}$$

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}} & 0<x<1,\ t>0. \\ v_x(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = x \end{cases}$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2} \qquad \delta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

$$\begin{cases} v_n' + \delta_n^2 v_n = g_n(t) \\ v_n(0) = x_n \end{cases}$$

$$g_n = \frac{2}{1}\int_0^1 \frac{e^{-\frac{t}{4}}}{4} \cos(\delta_n x)\,dx = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{4}} \frac{\sin\delta_n}{\delta_n}$$

$$x_n = 2\int_0^1 x\cos(\delta_n x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\delta_n}\int_0^1 x\, d\sin(\delta_n x)\,dx = \frac{2}{\delta_n}\left(x\sin\delta_n x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin\delta_n x\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\delta_n}\left(\sin\delta_n + \frac{\cos\delta_n x}{\delta_n}\Big|_0^1\right) = \frac{2}{\delta_n}\left(\sin\delta_n + \frac{\cos\delta_n - 1}{\delta_n}\right)$$

$$v_n = C_n e^{-\delta_n^2 t} + A_n e^{-t/4}$$

$$-\frac{1}{4}A_n + \delta_n^2 A_n = \frac{1}{2}\frac{\sin\delta_n}{\delta_n} \Rightarrow A_n = \frac{\sin\delta_n}{2\delta_n\left(\delta_n^2 - \frac{1}{4}\right)}$$

$$C_n = x_n - A_n \qquad u = e^{-\frac{t}{4}} + \sum_{n}^{\infty} v_n(t)\cos\delta_n x$$

שאלה 5. יהיו $u(x,t)$ ו- $v(x,t)$ פתרונות לבעיות תנאי ההתחלה הבאות

$$\begin{cases} u_t = 5u_{xx} - u \\ u(x,0) = e^{-x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} v_t = v_{xx} \\ v(x,0) = 5e^{-|x|} \end{cases} \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

מצאו $$\lim_{t\to\infty}\left(e^t \frac{u(x,t)}{v(x,t)}\right)$$

5.

$u = \cancel{w}e^{-t}$

$$\begin{cases} w_t = 5\, w_{xx} \\ w(x,0) = e^{-x^2} \end{cases} \qquad w(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{20t}}}{\sqrt{20\pi t}} \cdot \left(M_0^w + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

$$v(x,t) = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}\left(M_0^v + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$A = e^t \frac{u(x,t)}{v(x,t)} = \frac{w(x,t)}{v(x,t)} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{20t}}}{e^{-\frac{x^2}{4t}}} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{M_0^w + O\left(\frac{1}{t}\right)}{M_0^v + O\left(\frac{1}{t}\right)}\right).$$

כאשר $t \to \infty$

$$e^{-\frac{x^2}{20t}} \to 1, \quad e^{-\frac{x^2}{4t}} \to 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \to \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{M_0^w}{M_0^v}$$

$$M_0^w = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$M_0^v = 2\int_0^{\infty} 5e^{-x} dx = 10\int_0^{\infty} e^{-x} = 10$$

$$A \to \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{\pi}}{10} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{\pi}{5}}$$