שיטות באנליזה מתמטית – תרגיל מספר 8

א. פתור את בעיות ההתחלה בעזרת טראנספורם לפלס:

1. $y'' - y' - 6y = 0 \quad , y(0) = 1 \quad , y'(0) = -1$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0 \quad , y(0) = 1 \quad , y'(0) = 0$
3. $y'' - 2y' + 2y = 0 \quad , y(0) = 0 \quad , y'(0) = 1$
4. $y'' - 4y' + 4y = 0 \quad , y(0) = 1 \quad , y'(0) = 1$
5. $y'' - 2y' - 2y = 0 \quad , y(0) = 2 \quad , y'(0) = 0$
6. $y'' + 2y' + 5y = 0 \quad , y(0) = 2 \quad , y'(0) = -1$
7. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0 \quad , y(0) = 0 \quad , y'(0) = 1 \quad , y''(0) = 0 \quad , y'''(0) = 1$
8. $y^{(4)} - 4y = 0 \quad , y(0) = 1 \quad , y'(0) = 0 \quad , y''(0) = -2 \quad , y'''(0) = 0$

ב. פתור את המשוואות הבאות $(H(t-C) = u(t-C) = u_c(t))$

1. $y'' + 2y' + y = 2(t-3)H(t-3) \quad , y(0) = 2 \quad , y'(0) = 1$

1a. $y'' + y = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \le t < \infty \end{cases}, y(0) = 0 \quad , y'(0) = 1$

2. $y'' + 4y = \sin t - H(t-\pi)\sin t \quad , y(0) = 0 \quad , y'(0) = 0$
3. $y'' + 4y = \sin t - H(t-2\pi)\sin(t-2\pi), y(0) = 0 \quad , y'(0) = 0$
4. $y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < \infty \end{cases}, y(0) = 0 \quad , y'(0) = 1$
5. $y'' + 3y' + 2y = H(t-2) \qquad y(0) = 0 \quad , y'(0) = 1$
6. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & \pi \le t \end{cases}, \quad y(0) = 0 \quad , y'(0) = 0$

8. $y'' + 2y' + 3y = \sin t + \delta(t-\pi) \quad , y(0) = 0 \quad , y'(0) = 1$
9. $y'' + \omega^2 y = \delta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \quad , y(0) = 1 \quad , y'(0) = 0$
10. $y'' + 4y = 2\delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \quad , y(0) = 0 \quad , y'(0) = 0$
11. $y'' + 4y = 4\delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\sin t, y(0) = 0 \quad , y'(0) = 0$

3. חשב את הקונבולוציות של זוגות הפונקציות הבאות:

1. $a^{at}, e^{bt} \quad (a \ne b)$
2. $\cos at, \cos bt \quad (a \ne b)$
3. $\sin at, \cos bt \quad (a \ne b)$
4. $t, \sin t$

<u>שיטות באנליזה מתמטית (תרגיל מספר 8 – תשובות):</u>

א.

1. $y(t)=\frac{1}{5}\left(e^{3t}+4e^{-2t}\right)$
2. $y(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$
3. $y(t)=e^{t}\sin t$
4. $y(t)=e^{2t}-te^{2t}$
5. $y(t)=2e^{t}\cosh\left(\sqrt{3}t\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{t}\sinh\left(\sqrt{3}t\right)$
6. $y(t)=2e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$
7. $y(t)=te^{t}-t^{2}e^{t}+\frac{2}{3}t^{3}e^{t}$
8. $y(t)=\cos\sqrt{2}t$

ב.

1. $y(t)=(2+3t)e^{-t}+H(t-3)\left[2(t-5)+2(t-1)e^{-(t-3)}\right]$

1a. $y(t)=1-\cos t+\sin t-H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)(1-\sin t)$

2. $y(t)=\frac{1}{6}(2\sin t-\sin 2t)-\frac{1}{6}H(t-\pi)(2\sin t-\sin 2t)$
3. $y(t)=\frac{1}{6}\left[1-H(t-2\pi)\right](2\sin t-\sin 2t)$
4. $y(t)=t-H(t-1)\left[t-1-\sin(t-1)\right]$
5. $y(t)=H(t-2)h(t-2)+e^{-t}-e^{-2t};\quad h(t)=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$
6. $y(t)=h(t)+H(t-\pi)h(t-\pi);\quad h(t)=\frac{4}{17}\left[-4\cos t+\sin t+4e^{-1/2}\cos t+e^{-1/2}\sin t\right]$
7.
8. $y(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t}\sin\sqrt{2}t+\frac{1}{4}e^{-t}\cos\sqrt{2}t+\frac{1}{4}(\sin t-\cos t)+\frac{\sqrt{2}}{2}H(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\sin\sqrt{2}(t-\pi)$
9. $y(t)=\cos\omega t-\frac{1}{\omega}H\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\sin\omega t$
10. $y(t)=H\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\sin 2\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$
11. $y(t)=H\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin 2\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$

ד.

1. $\frac{1}{b-a}\left(e^{bt}-a^{at}\right)$
2. $\frac{1}{a^2-b^2}(a\sin at-b\sin bt)$
3. $\frac{1}{a^2-b^2}(a\sin bt-b\sin at)$
4. $t-\sin t$