

תרגול 6  
מערכות של משוואות דיפרנציאליות לינאריות

פתור

$$1. \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - 4x \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y + 4z \\ z' = x - z \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = x - 2y + 2 \sin t \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y + 15e^t \sqrt{t} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x' - x - 5y = 1 \\ y' + 2x + y = e^t \\ x|_{t=0} = y|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

תשובות

$$1. \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} \\ y = C_1 e^t - 3C_2 e^{-t} \\ z = C_1 e^t - 5C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = C_1 + C_2 t + C_3 e^{3t} \\ y = C_2 - 2C_1 - 2C_2 t + C_3 e^{3t} \\ z = C_1 - C_2 + C_2 t + 0.25C_3 e^{3t} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} + 3e^{5t} \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} + e^{5t} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = 3C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 3 \sin t \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 2 \sin t - \cos t \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = e^t (C_1 + 2C_2 t - 8t^{5/2}) \\ y = e^t (C_1 - C_2 + 2C_2 t - 8t^{5/2} + 10t^{3/2}) \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = -\frac{11}{18} \cos 3t + \frac{1}{6} \sin 3t + \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{9} \\ y = \frac{2}{9} \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t - \frac{2}{9} \end{cases}$$

פתור בעזרת שיטות של אלגברה לינארית את המערכות הבאות:

$$1. \begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = y - x + z \\ z' = x - z \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x' = x - y - z \\ y' = x + y \\ z' = 3x + z \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x' = 2x + 2z - y \\ y' = x + 2z \\ z' = y - 2x - z \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = 3x - 2y - 3z \\ z' = 2z - x + y \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x' = y - 2x - 2z \\ y' = x - 2y + 2z \\ z' = 3x - 3y + 5z \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x' = 4x - y - z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}$$

תשתמש/י בשיטת ווריאציית פרמטרים כדי לפתור את המערכות הבאות:

$$8. \begin{cases} x' = x - y + \frac{1}{\cos t} \\ y' = 2x - y \end{cases} \quad 9. \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y + 15e^t \sqrt{t} \end{cases}$$

השתמש/י בשיטת לכסון מטריצות בתרגילים הבאים:

$$10. X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} \quad 11. X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix} \quad 12. X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

$$13. X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

14. א. פונקציות  $y_1 = (x^2 - 1)e^x + e^{2x}, y_2 = (x^2 + 1)e^x + e^{2x}$

הן שני פתרונות של משוואה האי-הומוגנית הבאה :

$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = (x - 3)e^{2x}$$

מצא/י פתרון כללי של המשוואה.

ב. השתמש/י בפתרון של סעיף א כדי לפתור משוואה

$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = x^2 e^{2x} .$$

תשובות:

$$1. \begin{cases} x = c_1 + 3c_2 e^{2t} \\ y = -2c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \\ z = c_1 + c_2 e^{2t} - 2c_3 e^{-t} \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x = e^t (2c_2 \sin 2t + 2c_3 \cos 2t) \\ y = e^t (c_1 - c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t) \\ z = e^t (-c_1 - 3c_2 \cos 2t + 3c_3 \sin 2t) \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \\ y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ z = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x = c_2 \cos t + (c_2 + 2c_3) \sin t \\ y = 2c_1 e^t + c_2 \cos t + (c_2 + 2c_3) \sin t \\ z = c_1 e^t + c_3 \cos t - (c_2 + c_3) \sin t \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = c_1 + c_2 e^t \\ y = 3c_1 + c_3 e^t \\ z = -c_1 + (c_2 - c_3) e^t \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \\ y = -c_1 e^{3t} + (c_2 + 2c_3) e^{-t} \\ z = -3c_1 e^{3t} + c_3 e^{-t} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3) e^{3t} \\ y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ z = c_1 e^{2t} + c_3 e^{3t} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t) \ln |\cos t| \\ y = (c_1 - c_2) \cos t + (c_1 + c_2) \sin t + 2t \sin t + 2 \cos t \ln |\cos t| \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x = (c_1 + 2c_2 t - 8t^{5/2}) e^t \\ y = (c_1 + 2c_2 t - c_2 - 8t^{5/2} + 10t^{3/2}) e^t \end{cases}$$

$$10. X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$11. X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

$$12. X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} e^t$$

$$13. X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t$$

$$14. \text{א } y = y_1 + c_1 e^x + c_2 x^2 e^x \\ \text{ב } y = c_1 e^x + c_2 x^2 e^x + e^{2x} (1 + 0.5x^2 - x^3)$$