אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 30.01.08
מרצים: ד"ר נ. צ'רניבסקיה, ד"ר ל. פריגוזין
מבחן ב: **משוואות דיפרנציאליות רגילות**
מס' הקורס 0201.1.9461
מועד א סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר: מותר להביא דף נוסחאות אחד

יש לפתור 5 שאלות הבאות בדפים המיועדים לכך בלבד.
לטיוטה השתמשו במחברת המצורפת לשאלון זה.
לכל שאלה משקל שווה (20 נקודות).

בהצלחה!

שאלה מס' 1. פתור/פתרי את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה

$$dx - \left(xy - x^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} \right) dy = 0$$

$$\frac{dx}{dy} - xy = -x^2 e^{-\frac{y^2}{2}}$$ משוואות ברנולי

$\boxed{1)\ x=0}$ $\quad$ 2) $x^{-2}x' - x^{-1}y = -e^{-\frac{y^2}{2}}$

$z = \frac{1}{x}$ $\qquad -z' - zy = -e^{-y^2/2}$

$z' + zy = +e^{-y^2/2}$

$z = c(y)e^{-\int y\,dy} = c(y)e^{-\frac{y^2}{2}}$

$c'e^{-y^2/2} = +e^{y^2/2}$

$c' = +1 \qquad c = +y + c_0$

תשובה:

$$\boxed{\frac{1}{x} = (c_0 + y)e^{-\frac{y^2}{2}}}$$

$$\boxed{x = 0}$$

שאלה מס' 2א. (10 נק') פתור/פתרי את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה

$$y y'' - (y')^2 - \frac{y y'}{x} = 0$$

הורדת סדר המשוואה:

$$y = C_1 e^{\int z\,dx}$$

$$y' = C_1 e^{\int z\,dx} z \qquad y'' = C_1 e^{\int z\,dx}(z' + z^2)$$

$$z' + z^2 - z^2 - \frac{1}{x} z = 0$$

$$z' = \frac{1}{x} z$$

$$z = C_2 x \qquad \underline{y = C_1 e^{C_2 \frac{x^2}{2}}}$$

שאלה מס' 2ב. **(10 נק')** פתור/פתרי את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה

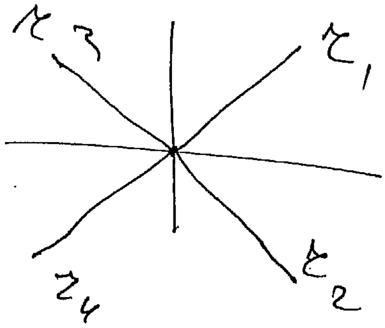
$$y^{(4)}+16y=e^{2x}+\cos x+4\sin x$$

$$r^4+16=0$$

$$r^4=-16=2^4e^{i\pi}$$

$$r_1=2e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad r_2=\overline{r_1}$$

$$r_3=2e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad r_4=\overline{r_3}$$



$$r_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2} \qquad r_3=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

$$\tilde{y}=C_1e^{\sqrt{2}x}\cos\sqrt{2}x+C_2e^{\sqrt{2}x}\sin\sqrt{2}x+C_3e^{-\sqrt{2}x}\cos\sqrt{2}x+$$
$$+C_4e^{-\sqrt{2}x}\sin\sqrt{2}x.$$

$$\hat{y}_1=Ae^{2x} \longrightarrow A(16e^{2x}+16e^{2x})=e^{2x}$$

$$\boxed{A=\frac{1}{32}}$$

$$\hat{y}_2=B\cos x+C\sin x$$

$$17B\cos x+17C\sin x=\cos x+4\sin x.$$

$$\boxed{B=\frac{1}{17} \qquad C=\frac{4}{17}}$$

$$y=\tilde{y}+\hat{y}_1+\hat{y}_2.$$

שאלה מס' 3. פונקציות $y_1 = x^2$ ו- $y_2 = e^x + x^2$ הן פתרונות של משוואה ליניארית אי-הומוגנית

$$xy'' - y' + (1-x)y = x^2 - x^3$$

מצא/י פתרון כללי של המשוואה.

פתרון פרטי של מ. הומוגנית: $\tilde{y}_1 = y_2 - y_1 = e^x$

פתרון כללי של מ. הומוגנית:

$$\tilde{y} = C_1 e^x \int \frac{e^{+\int \frac{dx}{x}}}{e^{2x}} dx + C_2 e^x =$$

$$= C_1 e^x \int x e^{-2x} dx + C_2 e^x =$$

$$= -\frac{C_1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + C_2 e^x = C_1 (2x+1)e^{-x} + C_2 e^x$$

פתרון כללי של מ. אי-הומוגנית:

$$y = \tilde{y} + y_1 = \underline{x^2 + C_1 (2x+1)e^{-x} + C_2 e^x}$$

שאלה מס' 4. השתמש/השתמשי בערכים ווקטורים עצמיים של מטריצה כדי לפתור את מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = x + \qquad 2z \\ z' = -2x + y - z \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>תקציר הפתרון</u>:

ערכים עצמיים: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm i$

ווקטורים עצמיים:

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix},\quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$$

קבוצה בסיסית של פתרונות:

$$\{\bar{v}_1 e^{t},\ \bar{v}_2 e^{it},\ \bar{v}_3 e^{-it}\}$$

$$\bar{v}_2 e^{it} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}(\cos t + i\sin t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t + \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

פתרונות ממשיים:

$$\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t + \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

פתרון כללי:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t + \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

<u>הערה</u>: עבור בחירה אחרת של ווקטורים עצמיים נקבל פתרון בצורה שונה אך שקול לפתרון זה.

שאלה מס' 5. השתמש/השתמשי בהתמרת לפלס כדי לפתור את הבעיה הבאה

$$y'' - 6y' + 10y = \delta(t-1) + f(t)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 5, \quad f(t) = \begin{cases} e^t & t \in [1,2] \\ 0 & t \notin [1,2] \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[y'] = pF(p) - y(0) = pF(p)$$

$$\mathcal{L}[y''] = p^2F(p) - py(0) - y'(0) = p^2F(p) - 5$$

$$f(t) = e^t\left(u_1(t) - u_2(t)\right) = u_1(t)e^{t-1}\cdot e - u_2(t)e^{t-2}\cdot e^2$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = e^{-p}\cdot\frac{e}{p-1} - e^{-2p}\frac{e^2}{p-1}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t-1)] = e^{-p}$$

$$p^2F(p) - 5 - 6pF(p) + 10F(p) = e\,\frac{e^{-p}}{p-1} - e^2\,\frac{e^{-2p}}{p-1} + e^{-p}$$

$$(p^2-6p+10)F(p) = e\cdot\frac{e^{-p}}{p-1} - e^2\frac{e^{-2p}}{p-1} + e^{-p} + 5$$

$$F(p) = e\cdot e^{-p}\frac{1}{(p^2-6p+10)(p-1)} - e^2\cdot e^{-2p}\frac{1}{(p^2-6p+10)(p-1)} + \frac{e^{-p}}{p^2-6p+10} + \frac{5}{p^2-6p+10}$$

$$\frac{1}{(p^2-6p+10)(p-1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2-6p+10} = \frac{A(p^2-6p+10)+(Bp+C)(p-1)}{(p-1)(p^2-6p+10)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -6A-B+C=0 \\ 10A-C=1 \end{cases} \Rightarrow C=5A \qquad A=\frac{1}{5},\ B=-\frac{1}{5},\ C=1$$

$$\frac{1}{(p^2-6p+10)(p-1)} = \frac{1}{5}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{5}\frac{p-5}{p^2-6p+10} =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{5}\frac{p-3}{(p-3)^2+1} + \frac{2}{5}\frac{1}{(p-3)^2+1}$$

$$y(t) = e\,u_1(t)\left[\frac{1}{5}e^{t-1} - \frac{1}{5}e^{3(t-1)}\cos(t-1) + \frac{2}{5}e^{3(t-1)}\sin(t-1)\right]$$
$$- e^2u_2(t)\left[\frac{1}{5}e^{t-2} - \frac{1}{5}e^{3(t-2)}\cos(t-2) + \frac{2}{5}e^{3(t-2)}\sin(t-2)\right]$$
$$+ u_1(t)e^{3(t-1)}\sin(t-1) + 5e^{3t}\sin t$$

TABLE 6.2.1 Elementary Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. t^n; $\quad n =$ positive integer	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. $t^p,\ p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
8. $\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
9. $e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
10. $e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at},\ n =$ positive integer	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
12. $u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right), \quad c > 0$
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
19. $(-t)^nf(t)$	$F^{(n)}(s)$