

חשבון אינפיטיסמלי 2 (201-1-0021)

בוחן אמצע, שנה"ל תשע"ב, סמסטר אביב

המרצים: ארקדי ליידרמן, אור שליט.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

חומר עזר: מחשבון פשוט ללא צג גרפי.

יש לענות על שאלה 1. כמו כן יש לענות על **שלוש** מתוך ארבעת השאלות 2-5. הקפידו להסביר כל צעד במהלך הפתרון, ולציין את המשפטים והטענות עליהם אתם מסתמכים.

בכל סעיף/שאלה ניתן לכתוב "לא יודעת" ולקבל חמישית מהנקודות (מעוגלות מעלה לחצי הנקודה הקרובה). **סעיפים/שאלות בהם כתבתם "לא יודעת" לא ייבדקו.**

בהצלחה!

שאלה 1 (שאלת חובה, 26 נק')

פונקציה $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת לינארית למקוטעין אם קיימת חלוקה

של $[a, b]$ וקיימים קבועים $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$ כך שלכל $j = 1, \dots, n$ מתקיים

$$f(x) = c_j x + d_j, \quad x \in (x_{j-1}, x_j)$$

הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמא נגדית את שתי הטענות הבאות:

א. (13 נק') תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ לינארית למקוטעין ותהי $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$ אינטגרבילית רימן. אזי $f \circ g$ אינטגרבילית רימן.

ב. (13 נק') תהי $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהי $f: [c, d] \rightarrow [a, b]$ לינארית למקוטעין. אזי $g \circ f$ אינטגרבילית רימן.

ענו על שלוש מתוך ארבעת השאלות הבאות. נא לציין אילו שאלות אתם רוצים שנבדוק.

שאלה 2 (25 נק')

חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. (8 נק')

$$\int e^x \arctg(e^x) dx$$

ב. (8 נק')

$$\int \frac{x^4 + 2x^2 - 1}{x^5 - x} dx$$

ג. (9 נק')

$$\int_0^{\pi/3} \frac{x}{1 + \cos x} dx$$

שאלה 3 (25 נק')

השתמשו בכלל המלבן (הקרוי גם "כלל נקודת האמצע") בכדי לחשב בקירוב את האינטגרל

$$\int_0^1 \sin(\sin(x)) dx$$

עם שגיאה הקטנה ממש מ- 0.005. נמקו.

שאלה 4 (25 נק')

תהי $f: [0,1] \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות. נניח ש- $|f''(x)| \leq 1$ $\max_{x \in [0,1]}$ וש- $f'(0) = 0$. נסמן ב- V את הנפח של גוף הסיבוב המתקבל על-ידי סיבוב הגרף של f סביב ציר x . עבור n טבעי ננסה לקרב את V באמצעות הסכום:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \pi \left[f\left(\frac{j-1/2}{n}\right) \right]^2$$

מהו ה- n המינימלי שמבטיח כי השגיאה תהיה קטנה ממש מ- $\frac{\pi}{60,000}$?

שאלה 5 (25 נק')

בתרגיל זה f ו- g מסמנות תמיד שתי פונקציות המוגדרות על הישר כולו אשר אינטגרליות רימן על כל תת-קטע סופי של הישר. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- אם $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ מתכנס אזי f חסומה. (9 נק')
- אם $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$ מתכנסים אזי $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx$ מתכנס. (8 נק')
- אם $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx$ מתכנסים אזי $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx$ מתכנס. (8 נק')

בהצלחה!