שאלה 1

א. דוגמא נגדית:

פונק' רימן $= g$ על הקטע $[0,1]$:

$$g(x) = \begin{cases} 1/q , & x = p/q \\ 0 , & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

בתרגיל בית הראנו ש-g אינט' רימן.

נגדיר f על $[-1,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & -1 \le x \le 0 \\ 1 , & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

נשים לב: $f \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 1 , & x \in \mathbb{Q} \\ 0 , & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

בהרצאה ראינו ש- $f \circ g$ אינה אינט' רימן (זוהי פונקציית דיריכלה).

ב. אם g אינט' רימן ו- f ליפשיצית למקוטעין אז $g \circ f$ אינט' רימן.

הוכחה:

ראשית, ניזכר שבהרצאה ראינו משפט שאומר ש- h אינט' רימן על $[a,b]$ אם ורק אם h אינט' רימן על $[a,c]$ ועל $[c,b]$.

מכאן נובע מיד באינדוקציה ש- f אינט' רימן על $[a,b]$ אמ"מ h אינט' רימן על כל הקטעים

$$[a,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},b]$$

מהערות לעיל נובע ששינוי פונקציה
במס' סופי של נק' לא משנה את היותה
אינט' רימן, ונובע שמספיק להוכיח את הטענה
הבאה:

<u>טענה:</u> אם $f:[c,d]\to[a,b]$ ליניארית ו- g
אינט' רימן על $[a,b]$, אזי $g\circ f$ אינט' רימן.

<u>הוכחה:</u> נניח ש- $f(x)=Ax+B$.
אם $A=0$ אזי $g\circ f$ קבועה, וסיימנו.
לכן נניח $A\neq 0$. אפשר להניח ש- $f([c,d])=[a,b]$.
(למה?)

נוכיח בעצם ש- $g\circ f$ אינט' רימן וש-
$$\int_c^d g\circ f(x)\,dx = I/|A|$$

יהי $\varepsilon>0$.
קיים $\delta>0$ כ"ש לכל חלוקה P של $[a,b]$
ולכל סדרת הצבה Y מתקיים
$$\Delta(P)<\delta \Rightarrow |I(g,P,Y)-I|<|A|\varepsilon$$
כעת, תהי Q חלוקה כלשהי של $[c,d]$
וש- Z סדרת הצבה מתאימה. נניח ש- $\Delta(Q)<\delta/|A|$.
נסמן $P=f(Q)$, $Y=f(Z)$.
אזי
$$|I(g\circ f,Q,Z)-I/|A||=|\sum g(f(z_j))\Delta_j(Q)-I/|A||$$
$$=|\sum g(y_j)\frac{\Delta_j(P)}{|A|}-\frac{I}{|A|}|$$
$$=\frac{1}{|A|}|I(g,P,Y)-I|$$
$$<\varepsilon$$
מש"ל.

שאלה 2

ב) נשתמש באינטגרציה בחלקים

$$(*) \quad \int_0^{\pi/3} F(x)G'(x)dx = F(x)G(x)\Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} F'(x)G(x)dx$$

כאשר

$$F(x) = x$$

$$G'(x) = \frac{1}{1+\cos x}$$

בכדי למצוא את $G(x)$ נשתמש בהצבה

$$dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x/2} = \frac{1}{1+\cos x} \Leftarrow t = tg(x/2)$$

$$G(x) = \int \frac{dx}{1+\cos x} = \int dt = t = tg(x/2)$$

לכן מ- (*) נקבל:

$$\int_0^{\pi/3} \frac{x}{1+\cos x}dx = x\, tg\, x/2 \Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} tg(x/2)\,dx$$

$$= \pi/3\, tg(\pi/6) + 2\ln|\cos\tfrac{x}{2}|\,\Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \pi/3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\ln(\sqrt{3}/2)$$

כאשר:

$$\int tg(x/2)dx \underset{\substack{\text{הצבה} \\ t = tg(x/2) \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}}}{=\!=\!=} \int \frac{2t\,dt}{1+t^2} = \ln(1+t^2)$$

$$= \ln\left(1+\frac{\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}\right)$$

$$= -\ln\left(\cos^2 \frac{x}{2}\right)$$

שאלה 2

א)

$$\int e^x \operatorname{arctg}(e^x)\,dx = \left\{ \overset{\text{הצבה}}{e^x = t} \right\}$$

$$= \int \operatorname{arctg}(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{בחלקים}}}{=\!=\!=} \operatorname{arctg} t \cdot t - \int \frac{t}{t^2+t}\,dt$$

$$= t \operatorname{arctg}(t) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C$$

$$= e^x \operatorname{argtg}(e^x) - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C$$

ב)

$$\frac{x^4+2x-1}{x^5-x} = \frac{x^4+2x-1}{x(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

ולכן

אינטגרל $= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \operatorname{arctg}(x) + C$

שאלה 3: נסמן $f(x) = \sin(\sin x)$

$$f'(x) = \cos(\sin x)\cos x$$

$$f''(x) = -\sin(\sin x)\cos^2 x - \cos(\sin x)\sin x$$

עבור $\theta \in [0,1]$ $\quad 0 \le \cos\theta \le 1$

$$0 \le \sin\theta \le \sin 1 \le 0.85$$

ולכן $0 \le \sin(\sin\theta) \le 0.75$

$\Leftarrow$ $|f''| \le 1.6$

נוסחת השגיאה בכלל נק' האמצע

$$E_n = \frac{f''(\xi)}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}$$

ולכן

$$|E_n| \le \frac{1.6}{24}\cdot\frac{1}{n^2}$$

עבור $n=4$ נקבל

$$|E_n| \le \frac{1}{240} < \frac{1}{200} = 0.005$$

כעת החישוב הוא:

$$I_4 = \frac{1}{4}\left(f(1/8) + f(3/8) + f(5/8) + f(7/8)\right)$$

$$= 0.43228\ldots$$

שאלה 4

לפי הנוסחא לנפח גוף סיבוב,

$$V = \int_0^1 \pi f(x)^2 dx$$

הביטוי

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \pi \left[f\left(\frac{j-\frac{1}{2}}{n}\right) \right]^2$$

זה פשוט כלל נק' האמצע לחישוב $\int_0^1 g(x)dx$

כאשר $g(x) = \pi f(x)^2$

נסמן $N = \sup_{0 \le x \le} |g''(x)|$

אזי השגיאה בחישוב הנפח קטנה או שווה ל-

$$\frac{N}{24} \cdot \frac{1}{n^2}$$

לכן אם $n^2 > \frac{60,000}{\pi} \cdot \frac{N}{24}$

השגיאה תהיה קטנה כנדרש. (עד כאן מרבית הנק')

נסמן $M = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x)|$, $M' = \sup_{0 \le x \le} |f'(x)|$

ו- $M'' = \sup_{0 \le x \le 1} |f''(x)|$

אזי $g'' = 2\pi \left((f')^2 + f f'' \right)$

ולכן $N \le 2\pi (M'^2 + M M'')$

נתון $M'' \le 1$. כמו כן $f'(0) = 0$ ולכן

$|f'(x)| = \left| \int_0^x f''(t)dt \right| \le x M'' \le 1$ ולכן $M' \le 1$.

לגבי M אי אפשר להסיק דבר.

נקבל

$$N \le 2\pi(1+M)$$

לכן נצטרך לדרוש

$$n^2 > 5{,}000(1+M)$$

כלומר $n = \left\lfloor \sqrt{5000(1+M)} \right\rfloor + 1$

<u>הערה:</u>

התבוננות בפונקציות. $f(x)=x^2+c$

מראה שלא אפשר לתת תשובה טובה יותר

(כלומר, n קטן יותר) באופן כללי.

(אך לא ציפינו לראות כזאת).

שאלה 5:

א) דוגמא נגדית: נגדיר f על $\mathbb{R}$ להיות

$$f(x) = \begin{cases} n, & x \in \left[n - \frac{1}{n \cdot 2^n}, n\right], \ n = 1,2,3,\dots \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז f אינט' רימן על כל תת-קטע סופי

f כי חסומה, ומתקיים לכל $L < 0 < M$

$$\int_L^M f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\lfloor M \rfloor} \frac{1}{2^k} \xrightarrow[M,L\to\infty]{} 2$$

ב) דוגמא נגדית:

$f(x) = g(x)$

נקח ונגדיר

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, & x > 1 \\ 0, & x \le 1 \end{cases}$$

אז $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס לפי קריטריון דיריכלה.

אבל

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2\,dx = \int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$$

לא מתכנס (ראינו בהרצאה)

למשל: $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ וכו'...

ב) נכון, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx$ אפילו: מתכנס בהחלט

מספיק להראות ש- $\int_L^M |f(x)g(x)|\,dx$ חסום.

ואכן, לכל a,b ממשיים

$$ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

(כי נובע מיד מ- $(a-b)^2 \ge 0$)

לכן

$$\int_L^M |f(x)||g(x)|\,dx \le \frac{1}{2}\int_L^M |f(x)|^2dx + \frac{1}{2}\int_L^M |g(x)|^2dx$$

כיוון שאגף ימין חסום ע"י $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} f^2dx < \infty$

גם אגף שמאל

! - $\int_{-\infty}^{\infty} |fg|\,dx$ מתכנס

$\Leftarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} fg\,dx$ מתכנס.