שאלה 3 :

(א)

חילוק

$$\int \frac{x^3}{x^3-4x^2+x-4}\,dx = \int\left[1+\frac{4x^2-x+4}{x^3-4x^2+x-4}\right]dx =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2+1 \\ x^3-4x^2+x-4 \,\big|\, x-4 \\ -\;x^3-4x^2 \\ \hline \qquad\qquad x-4 \end{array}}$$

$$= \int dx + \frac{1}{17}\left[\int \frac{4x-1}{x^2+1}\,dx + 64\int\frac{dx}{x-4}\right] =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{4x^2-x+4}{x^3-4x^2+x-4} = \dfrac{Ax+B}{x^2+1} + \dfrac{C}{x-4} = \\ = \dfrac{(A+C)x^2+(B-4A)x+(C-4B)}{x^3-4x^2+x-4} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A+C=4 \\ B-4A=-1 \\ C-4B=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A=4/17 \\ B=-1/17 \\ C=64/17 \end{array}}$$

$$= x + \frac{64}{17}\ln|x-4| + \frac{2}{17}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{1}{17}\int\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= x + \frac{64}{17}\ln|x-4| + \frac{2}{17}\ln(x^2+1) - \frac{1}{17}\arctan x + C$$

(ב) נשים לב אם נבצע שינוי משתנה $t=\ln\frac{1}{x}$ $\left(\begin{array}{l} x=e^{-t} \\ dx=-e^{-t}dt \end{array}\right)$

נקבל:

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p \ln\left(\tfrac{1}{x}\right)^q dx = \int_0^\infty t^q e^{-(p+1)t}\,dt$$

<u>$p>-1$</u>: $I(p,q) = \begin{Bmatrix} z=(p+1)t \\ dt=\frac{dz}{p+1} \end{Bmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{תלוי ב-}q \\ \text{לא מתאפס}}}{C}\; \underbrace{\int_0^\infty t^q e^{-t}\,dt}_{\text{פונ' גמא מתכנסת}}$

מתכנסת $\Leftrightarrow q>-1$

<u>$p=-1$</u>: $I(-1,q) = \int_0^\infty t^q\,dt \leftarrow$ מתבדר לכל q

<u>$p<-1$</u>: מתבדר לכל q, כי $\underbrace{t^q e^{-(p+1)t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty}$

אזי קיים M כך ש $t>M$: $t^q e^{-(p+1)t} > 1$

ולכן $\int_M^R t^q e^{-(p+1)t}\,dt > R-M \xrightarrow[R\to\infty]{} \infty$

<u>לסיכום</u>: האינטגרל מתכנס $\Leftrightarrow \begin{cases} p>-1 \\ q>-1 \end{cases}$