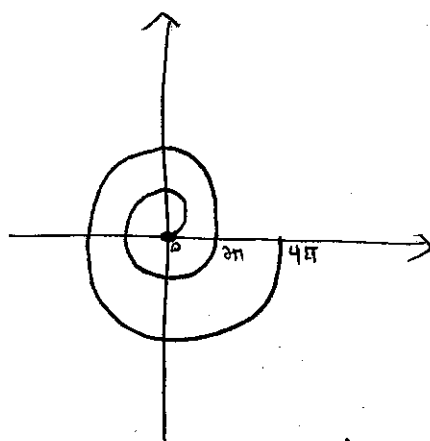


$$\gamma: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}$$



(k) (B)

$$L = \int_0^{4\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2} dt =$$

$$= \int_0^{4\pi} \sqrt{\cos^2 t - 2t \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t} dt =$$

$$= \int_0^{4\pi} \sqrt{1+t^2} dt = \left. \begin{array}{l} t = \sinh u \\ dt = \cosh u du \\ [0, 4\pi] \rightarrow [0, \operatorname{arsinh} 4\pi] \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{\operatorname{arsinh} 4\pi} \sqrt{1+\sinh^2 u} \cosh u du = \int_0^{\operatorname{arsinh} 4\pi} \cosh^2 u du =$$

$$\int_0^{\operatorname{arsinh} 4\pi} \frac{\cosh 2u + 1}{2} du = \left[\frac{\sinh 2u}{4} + \frac{u}{2} \right]_0^{\operatorname{arsinh} 4\pi} = \dots$$

$$= \frac{1}{2} (4\pi \sqrt{1+16\pi^2} + \operatorname{arsinh}(4\pi)) \quad (\approx 89.8193 \dots)$$

$$f(x,y) = e^{x-2y} - xe^{-y}$$

(4)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-2y} - e^{-y} \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2e^{x-2y} + xe^{-y} \stackrel{!}{=} 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y} = 1 \\ 2e^{x-y} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=2 \end{cases} \quad (5)$$

הנקודה הקריטית היחידה היא $(2,2)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x-2y} & -2e^{x-2y} + e^{-y} \\ -2e^{x-2y} + e^{-y} & 4e^{x-2y} - xe^{-y} \end{pmatrix}$$

$$A = H_f(2,2) = \begin{pmatrix} e^{-2} & -e^{-2} \\ -e^{-2} & 2e^{-2} \end{pmatrix}$$

$A_{11} = e^{-2} > 0$ וגם $\det A = 2e^{-4} - e^{-4} = e^{-4} > 0$ מכאן

הנקודה $(2,2)$ היא נקודה קריטית מקומית של f

(2) $S \ni (2,2)$ היא נקודה קריטית מקומית של f היחידה

היחסים בין הנקודות S והקריטיות המקומיות של f הם כדלקמן:

הנקודה $(0,4)$ היא נקודה קריטית מקומית של f היחידה

$x=0$: $g(y) = f(0,y) = e^{-2y}$

$(0,4), (0,0)$

$y=0$: $g(x) = f(x,0) = e^x - x$

הנקודה $(4,0)$ היא נקודה קריטית מקומית של f היחידה

$$g(y) = f(x, y) = e^{4-y} - 4e^{-y}$$

$$: x=4$$

$$g'(y) = -e^{4-y} + 4e^{-y} = 0 \Leftrightarrow e^{4-y} = 4 \Leftrightarrow \boxed{y = 4 - \ln 4}$$

$\{ (x, y) \mid y \in (0, 4) \}$ -> נקודות קצה

$$g(x) = f(x, 4) = e^{x-4} - 4e^{-4}$$

$$: y=4$$

$$g'(x) = e^{x-4} - e^{-4} = 0 \Leftrightarrow x=4$$

נקודות קצה: $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,0)$, $(4,4)$, $(2,2)$

(x, y)	$f(x, y)$
$(0, 0)$	1
$(0, 4)$	e^{-8}
$(4, 0)$	$e^4 - 4$
$(4, 4)$	$-3e^{-4}$
$(4, 4 - \ln 4)$	$-4e^{-4}$
$(2, 2)$	$-e^{-2}$

$$-e^{-2} < -4e^{-4} < -3e^{-4} < e^{-8} < 1 < e^4 - 4$$

$$\max_{x \in S} f(x) = e^4 - 4$$

$$\min_{x \in S} f(x) = -e^{-2}$$