שאלה 1א:

עלינו להראות שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P של הקטע $[0,1]$ כך ש-

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

יהי $\varepsilon > 0$.

נסמן $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$

נגדיר חלוקה P באופן הבא:

ראשית, יהי N כ"ש $2M/N < \varepsilon/3$.

שנית, יהי $\delta > 0$ כל-כך קטן כך ש-

ⓐ $2\delta < \frac{1}{N(N+1)}$

ⓑ $2N \cdot 2\delta \cdot M < \varepsilon/3$

שלישית, לכל $n = 1, 2, \dots, N-1$ תהי P_n חלוקה של הקטע $[\frac{1}{n+1}+\delta, \frac{1}{n}-\delta]$ אשר עבורה

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) < \frac{1}{N} \cdot \varepsilon/3$$

יש כזו חלוקה כי f רציפה שם.

סוף סוף נגדיר חלוקה של $[0,1]$

$$P = \{0, \tfrac{1}{N}-\delta\} \cup \{\tfrac{1}{N}-\delta, \tfrac{1}{N}+\delta\} \cup P_{N-1} \cup \{\tfrac{1}{N-1}-\delta, \tfrac{1}{N-1}+\delta\} \cup P_{N-2} \cup \dots$$

$$\dots \cup P_1 \cup \{1-\delta, 1\}$$

(המשך)

שימו לב שבהגדרה של P באיחוד,
כל נק' מהצורה $\frac{1}{n}-\delta$ מופיעה פעמיים,
אבל אין זה מפריע.
כנ"ל נ"ע מהצורה $\frac{1}{n}+\delta$.

כעת מתקיים

$$U(f,P)-L(f,P) \leq 2M\cdot\left(\tfrac{1}{N}-\delta\right)+(N-1)\cdot 4M\delta+\sum_{n=1}^{N-1}\left(U(f,P_n)-L(f,P_n)\right)$$

$$+\,2M\delta<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$$

כאשר: (א) $2M(1/N-\delta)$ זו התרומה מהקטע $[0,\frac{1}{N}-\delta]$.

(ב) $4(N-1)M\delta$ זו התרומה מן הקטעים

$[\frac{1}{N}-\delta,\frac{1}{N}+\delta],\ [\frac{1}{N-1}-\delta,\frac{1}{N-1}+\delta],\ \dots,\ [\frac{1}{2}-\delta,\frac{1}{2}+\delta]$

יש $N-1$ קטעים כאלו, וכל אחד באורך 2δ.
ובכל קטע מתקיים $|\sup f(x)-\inf f(x)|\leq 2M$.

(ג) $\sum_{n=1}^{N-1}\left(U(f,P_n)-L(f,P_n)\right)$ זו התרומה מן הקטעים

$[\frac{1}{N}+\delta,\frac{1}{N-1}-\delta],\ \dots,\ [\frac{1}{3}+\delta,\frac{1}{2}-\delta],\ [\frac{1}{2}+\delta,1-\delta]$

(3) $2M\delta$ זו התרומה מן הקטע $[1-\delta,1]$.

שאלה 1 ג':

כאשר נראה ש- $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n+1)^{-1}}^{n^{-1}} f(x)dx$.

אכן מתכונות האינטגרל

$$\forall N. \quad \int_{(N+1)^{-1}}^{1} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} \int_{(n+1)^{-1}}^{n^{-1}} f(x)\,dx \quad \left(\text{סכום סופי!}\right)$$

(אנו יכולים להשתמש בתכונות האינטגרל כי כבר הוכחנו ש-f אינטגרבילית).

לכן

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \sum_{n=1}^{N} \int_{(n+1)^{-1}}^{n^{-1}} f(x)dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^{(N+1)^{-1}} f(x)dx \right| \le \frac{M}{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

לכן הטור מתכנס וסכומו שווה ל- $\int_0^1 f(x)dx$.

כדי להראות שהתכנסות היא בהחלט

צ"ל $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{(n+1)^{-1}}^{n^{-1}} f(x)dx \right| < \infty$

~~אבל f אינט' ⟸ |f| אינט'.~~

אבל $|f|$ מקיימת את אותם תנאים כמו f.

לכן $\sum \int_{(n+1)^{-1}}^{n^{-1}} |f| dx$ מתכנס, ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{(n+1)^{-1}}^{n^{-1}} f(x)dx \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n+1)^{-1}}^{n^{-1}} |f(x)|dx < \infty$$

שאלה 2 ג:

$$f(x) = x^{-2}\sin x$$

$$f'(x) = -2x^{-3}\sin x + x^{-2}\cos x$$

$$f''(x) = 6x^{-4}\sin x - 4x^{-3}\cos x - x^{-2}\sin x$$

נמצא חסם על $|f''|$ בקטע $[2,3]$
בכדי שנדע לכמה חלקים לחלק את $[2,3]$
בשביל לקבל דיוק גבוה מספיק עם כלל הטרפס
או כלל נק' האמצע.

$$|6x^{-4}\sin x| \le |6x^{-4}| < 1/2$$

$$|4x^{-3}\cos x| \le |4x^{-3}| \le 1/2$$

$$|x^{-2}\sin x| \le |x^{-2}| \le 1/4$$

לכן

$$M := \sup_{x\in[2,3]} |f''(x)| \le 5/4$$

(הערה: אפשר לקבל חסם הרבה יותר טוב
אבל אין צורך.)

כעת החסם לשגיאה בכלל נק' האמצע נותן

$$|E_n| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} M \le \frac{5}{96}\cdot\frac{1}{n^2}$$

כדי להבטיח $|E_n| \le 0.01$ נדרוש

$$\frac{5}{96}\cdot\frac{1}{n^2} \le 0.01 \Longleftarrow n^2 \ge \frac{500}{96}.$$

$n=3$
יספיק.

(הערה: למעשה, גם $n=2$ יספיק).

כרגע נוגע רק להציג

$$I_3 = \sum_{j=1}^{3} f\left(2+(j-\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{3}\right)\cdot\tfrac{1}{3} = 0.10328\ldots$$

דרך אגב: הערך האמיתי של האינטגרל הוא

$I =$ ~~[illegible]~~ $0.10426\ldots$

שאלה 2 ב':

a_n הוא הטבעי m הקטן ביותר המקיים

$$|E_m| \leq \frac{1}{n}$$

אבל $|E_m| \leq \frac{C}{m^2}$ לכל m.

לכן אם $m \geq \sqrt{Cn}$ מתקיים $|E_m| \leq \frac{1}{n}$.

הטבעי הקטן ביותר $m = a_n$ המקיים זאת הוא לכן יותר קטן מ- $\sqrt{cn}+1$ ~~[illegible]~~.

כלומר: ~~[illegible]~~ $a_n < \sqrt{cn}+1$

לכן $a_n^{-1} > \frac{1}{\sqrt{cn}+1}$

אבל $\sum \frac{1}{\sqrt{cn}+1}$ מתבדר (ממבחן השוואה בגבול עם $\frac{1}{\sqrt{n}}$)

לכן ממבחן ההשוואה $\sum a_n^{-1} = \infty$.

(הערה: אפשר לקחת $C = \frac{\sup|f''|}{12}$ אך זה לא משנה).