



תאריך הבחינה: 14.07.2013  
מבחן ב: חשבון אינפיניטיסימלי 2  
מס' קורס: 201-1-0021  
שנה: תשע"ב סמסטר: ב מועד: א  
שם המרצה: אור שליט  
משך הבחינה: שלוש וחצי שעות  
חומר עזר: מחשבון פשוט ללא צג גרפי

**ענו על ארבעת השאלות הבאות.** הקפידו להסביר כל צעד במהלך הפתרון, ולציין את המשפטים והטענות עליהם אתם מסתמכים. בכל סעיף/שאלה ניתן לכתוב "לא יודעת/ת" ולקבל חמישית מהנקודות (מעוגלות מעלה לחצי הנקודה הקרובה).  
**סעיפים/שאלות בהם כתבתם "לא יודעת/ת" לא ייבדקו. בהצלחה!**

**שאלה 1 (25 נק')**

תהייה  $f, g: [a, b] \rightarrow [a, b]$  פונקציות אינטגרביליות רימן בקטע  $[a, b]$ . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. (15 נק') הפונקציה  $f \circ g$  (הכפל שלהן) אינטגרבילית רימן.  
ב. (10 נק') הפונקציה  $f \circ g$  (ההרכבה שלהן) אינטגרבילית רימן.

**שאלה 2 (25 נק')**

תהי  $K \subset \mathbb{R}^d$  קבוצה קומפקטית, ותהי  $f: K \rightarrow \mathbb{R}^d$ . נסמן  $A = f(K)$ .

א. (5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם  $f$  רציפה אזי התמונה של כל תת-קבוצה סגורה של  $K$  היא קבוצה סגורה ב-  $\mathbb{R}^d$ .

ב. (5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם התמונה של כל תת-קבוצה סגורה של  $K$  היא קבוצה סגורה ב-  $\mathbb{R}^d$  אזי  $f$  רציפה.

ג. (15 נק') הוכיחו: אם  $f$  רציפה וחד-חד ערכית אזי מוגדרת פונקציה הופכית רציפה  $f^{-1}: A \rightarrow K$ .

### שאלה 3 (25 נק')

- א. (10 נק') נניח שטור החזקות  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  מתכנס במידה שווה על הישר. הראו שקיים  $N$  כך ש  $a_n = 0$  לכל  $n > N$ .
- ב. (5 נק') האם המסקנה נשארת תקפה גם אם מחליפים את הפונקציות  $x^n$  המופיעות בטור בפונקציות  $\frac{1}{1+x^{2n}}$ ? נמקו!
- ג. (10 נק') נניח שטור החזקות  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  מתכנס (נקודתית) על הישר לפונקציה אי זוגית. הראו ש-  $a_n = 0$  לכל  $n$  זוגי.

### שאלה 4 (25 נק')

- נתבונן בפונקציה  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ , המוגדרת בכל המישור פרט לראשית. א. (10 נק') האם  $f$  דיפרנציאבילית בתחום הגדרתה? נמקו!
- ב. (15 נק') נניח ש-

$$P(x, y) = a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$$

פולינום בשני משתנים מסדר שני המקיים ש-

$$f(x, y) - P(x, y) = o((x-1)^2 + (y-1)^2)$$

מצאו את המקדמים  $a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02}$ . הסבירו מדוע רק המקדמים אותם חיבתם יכולים לקיים זאת.

**בהצלחה!**