אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
מדור בחינות

<u>תאריך הבחינה</u>: 6.7.2014
<u>מבחן ב</u>: חשבון אינפיניטיסמלי 2
<u>מס׳ קורס</u>: 201-1-0021
<u>שנה</u>: תשע״ב <u>סמסטר</u>: ב <u>מועד</u>: א
<u>שם המרצה</u>: אור שליט
<u>משך הבחינה</u>: שלוש שעות
<u>חומר עזר</u>: מחשבון פשוט ללא צג גרפי

<u>ענו על שלושת השאלות הבאות.</u> הקפידו להסביר כל צעד במהלך הפתרון, ולציין את המשפטים והטענות עליהם אתם מסתמכים. בכל סעיף/שאלה ניתן לכתוב ״לא יודע/ת״ ולקבל חמישית מהנקודות (מעוגלות מעלה לחצי הנקודה הקרובה).
סעיפים/שאלות בהם כתבתם ״לא יודע/ת״ לא ייבדקו. <u>בהצלחה!</u>

<u>שאלה 1</u> (30 נק׳)
תהי $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונניח שלכל $y\in[c,d]$, הנגזרת החלקית של f לפי המשתנה הראשון קיימת, כלומר לכל x,y קיים הגבול

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}.$$

(כאשר $x=a$ או $x=b$ הכוונה היא לגבול חד צדדי). נניח בנוסף
א. לכל $x\in[a,b]$, הפונקציה $y\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ היא אינטגרבילית רימן.
ב. קיים $M\in[0,\infty)$ כך שלכל $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ מתקיים $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\le M$.

הוכיחו שמתקיים:

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

<u>בונוס (5 נק׳):</u> האם אפשר לוותר על הנחה א׳? האם אפשר לוותר על הנחה ב׳?

שאלה 2 (35 נק׳)

נסמן ב- $C_0(\mathbb{R}^n)$ את אוסף הפונקציות הרציפות על המרחב $\mathbb{R}^n$ ה״שואפות לאפס באינסוף״ כלומר אוסף כל הפונקציות f המקיימות: לכל $\epsilon > 0$ קיימת קבוצה קומפקטית $K \subset \mathbb{R}^n$ כך שלכל $x \notin K$ מתקיים $|f(x)| < \epsilon$.

א. (5 נק׳) הוכיחו שלכל $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ מתקיים: אם $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ סדרה כך ש- $||x_n|| \to \infty$, אזי $f(x_n) \to 0$.

ב. (15 נק׳) הוכיחו: כל $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ היא רציפה במידה שווה.

ג. (15 נק׳) עבור $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, נגדיר סדרה ע״י $f_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$. עבור אילו f מתקיים שהסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת (נקודתית)? עבור אילו f מתקיים שהסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת במידה שווה?

שאלה 3 (35 נק׳)

א. (5 נק׳) הראו (בקצרה) שקיימת פונקציה $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, הגזירה אינסוף פעמים, ואשר מתאפסת מחוץ לקטע $[-1,1]$ אבל חיובית ממש בקטע $(-1,1)$.

ב. (10 נק׳) הראו שאם $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ו-g כמו בסעיף הקודם, אזי לכל $x \in \mathbb{R}$ האינטגרל הבא מתכנס בהחלט

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

וכמו כן, הוכיחו שמתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

ג. (10 נק׳) הראו שאם f ו- g כמו בסעיף הקודם, אזי $f * g$ (הקונבולוציה של f ו- g) היא פונקציה גזירה אינסוף פעמים.

ד. (10 נק׳) הוכיחו שלכל פונקציה f הרציפה במידה שווה על הישר, ולכל $\epsilon > 0$, קיימת פונקציה h בעלת נגזרות מכל סדר, כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $|h(x) - f(x)| < \epsilon$.

בהצלחה!