אינפי 2, 2014, פתרונות מועד א'

① נקבע $x \in [a,b]$.

תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [a,b]$ סדרה המקיימת

(i) $\forall n.\ x_n \neq x$

(ii) $x_n \longrightarrow x$

נגדיר כעת סדרת פונקציות על $[c,d]$

$$g_n(y) = \cancel{\frac{f(x_n,y)-f(x,y)}{x}}$$

$$= \frac{f(x_n,y)-f(x,y)}{x_n - x}$$

$\longleftarrow$ ברור שזו פונקציה רציפה לכל n.

אז מתקיים $g_n(y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ לכל y

לכן הסדרה $\{g_n\}$ מתכנסת נקודתית ל- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$.

בנוסף, לכל $y \in [c,d]$

$$|g_n(y)| = \left|\frac{f(x_n,y)-f(x,y)}{x_n - x}\right|$$

$$= \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_n, y)\right| \leq M$$

$\longleftarrow$ משפט לגרנז'

(ξ_n בין x_n ו- x)

<u>סיכום ביניים:</u> בנינו, לכל $x \neq x_n \to x$,
סדרה של פונקציות רציפות $\{g_n\}$, כך ש-

$$\forall y. \quad g_n(y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad (i)$$

$$\forall y. \quad |g_n(y)| \le M \qquad (ii)$$

לפי <u>משפט ההתכנסות הנשלטת</u> מתקיים

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_c^d g_n(y)\,dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

כעת נסמן $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$

זוהי פונקציה של x. אם F גזירה, אז

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy$$

F היא גזירה אם ורק אם לכל סדרה $x \neq x_n \to x$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{F(x_n)-F(x)}{x_n - x}$ קיים.

אבל

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x_n)-F(x)}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} \int_c^d \frac{f(x_n,y)-f(x,y)}{x_n - x}\,dy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_c^d g_n(y)\,dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

לפי $(*)$

זה מראה ש- $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ גזירה ומתקיים

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

<u>מ.ש.ל.</u>

תהי $\{x_n\}$ סדרה כ״ש $\|x_n\|\to\infty$.

2) א. יהי $\varepsilon>0$. קיימת K קומפקטית

כך ש- $\forall x\notin K.\ |f(x)|<\varepsilon$

K קומפקטית $\Leftarrow$ K חסומה, לכן קיים $0<R$

$\cancel{\exists N.\ \forall n\geq M.\ \|x_n\| > \max_{y\in K}\|y\|}$

כ״ש $\forall x\in K.\ \|x\|\leq R$

$\|x_n\|\to\infty$, לכן קיים N כ״ש $\forall n\geq N.\ \|x_n\|>R$

כלומר $\forall n\geq N.\ x_n\notin K$

ולכן $\forall n\geq N.\ |f(x_n)|<\varepsilon$.

זה מוכיח ש- $f(x_n)\to 0$. מ.ש.ל.

ב. יהי $\varepsilon>0$. תהי $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$.

תהי K כ״ש $\forall x\notin K.\ |f(x)|<\varepsilon/2$.

יהי $0<R$ כ״ש $K\subseteq \overline{B}_R(0)$

(יש כזה R, כי K חסומה).

$\overline{B}_{R+1}(0)$ סגורה וחסומה, לכן קומפקטית.

לכן f רציפה במ״ש ב- $\overline{B}_{R+1}(0)$.

יהי $\delta>0$ המקיים $\forall x,y\in\overline{B}_{R+1}(0).\ \|x-y\|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$

בה״כ, נוכל להניח $\delta<1$. (אחרת ניקח δ קטן יותר).

כעת נראה שלכל $x,y\in\mathbb{R}^n$

$$\|x-y\|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

נניח $\|x-y\|<\delta$.
אם y ו- x שניהם ב- $\bar{B}_{R+1}(0)$ אז

לפי בחירת δ, $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$.

לכן נותר רק לבדוק במקרה בו אחת
הנק' אינה ב- $\bar{B}_{R+1}(0)$.

נניח בה"כ $y\notin\bar{B}_{R+1}(0)$. אז $x\notin\bar{B}_R(0)$,
כי אחרת $\|x\|\le R$

$$\|y\| = \|y-x\|+\|x\| \le \delta+R < R+1$$

סתירה ל- $y\notin\bar{B}_{R+1}(0)$.

לכן מתקיים ש- $x,y\notin K$, ולכן

$$|f(x)-f(y)| \le |f(x)|+|f(y)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

מ.ש.ל.

d. עבור כל $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$ מתקיים $f_n(x)=f(x/n)\longrightarrow f(0)$ לכל $x\in\mathbb{R}^n$ נקודתית

כלומר לכל f הסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת
לפונקציה הקבועה $f(0)$.

ההתכנסות היא במידה שווה

אם ורק אם $f\equiv 0$.

אם $f\equiv 0$, אז $f_n\equiv 0$ לכל n,

לכן בודאי ש- $f_n \rightrightarrows 0$.

אם $f\not\equiv 0$, אז קיים $x\in\mathbb{R}^n$ כך ש-

$f(x)\neq f(0)$ (כי אחרת f היתה קבועה, והפונקציה הקבועה היחידה ב- $C_0(\mathbb{R}^n)$ היא האפס).

אם נסמן $|f(x)-f(0)| =: d>0$

אז לכל n

$$|f_n(nx)-f(0)| = |f(x)-f(0)| = d>0$$

כלומר לכל n

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} |f_n(y)-f(0)| \geq d>0$$

כלומר אין התכנסות במ"ש.

מ.ש.ל.