אינפי 2 - 4102 - פתרון מועד א' - שאלה 3

1. נגדיר

$$g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x|<1 \\ 0, & |x|\geq 1 \end{cases}$$

בתרגול ראינו כי g פונקציה חלקה (בכל הישר), חיובית ממש בקטע $(-1,1)$ ומתאפסת מחוץ ל-$[-1,1]$.

2. מכיוון ש-g מתאפסת מחוץ ל-$[-1,1]$ מתקיים

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\ dy = \\ &= \lim_{M,N\to\infty}\int\limits_{-M}^{N} f(x-y)\,g(y)\ dy = \\ &= \int\limits_{-1}^{1} f(x-y)\,g(y)\ dy\end{aligned}$$

ובאותו האופן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)\,g(y)|\ dy = \int\limits_{-1}^{1} |f(x-y)\,g(y)|\ dy$$

מכיוון ש-f ו-g רציפות, $f(x-y)\,g(y)$ אינטגרבילית רימאן ב-$[-1,1]$ ולכן גם $|f(x-y)\,g(y)|$, מכאן שהאינטגרל מתכנס בהחלט. בנוסף,

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int\limits_{-1}^{1} f(x-y)\,g(y)\ dy = \left\{\begin{matrix} z=x-y \\ dz=-dy \\ [-1,1]\mapsto[x+1,x-1]\end{matrix}\right\} = \\ &= -\int\limits_{x+1}^{x-1} f(z)\,g(x-z)\ dz = \int\limits_{x-1}^{x+1} f(z)\,g(x-z)\ dz = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\,g(x-z)\ dz\end{aligned}$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מכך ש-$g(x-z)$ מתאפס מחוץ ל-$[x+1,x-1]$.

3. מהסעיף הקודם

$$\frac{d}{dx}(f*g)(x)=\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{x-1}^{x+1}f(z)\,g(x-z)\ dz\right)$$

לפי משפט לייבניץ המוכלל,

$$\frac{d}{dx}(f*g)(x)=f(x+1)\,g(-1)-f(x-1)\,g(1)+\int\limits_{x-1}^{x+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(f(y)\,g(x-y)\right)\ dy=$$

$$=\int\limits_{x-1}^{x+1}f(y)\,g'(x-y)\ dy=\left(f*g'\right)(x)$$

4. יהיה C כך ש־

$$\frac{1}{C}=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\ dx$$

(האינטגרל קיים שכן g רציפה ובעלת תומך קומפקטי). לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר

$$h_n(x):=Cng(nx)$$

יהיה $\epsilon>0$. מההנחה, f רציפה במ"ש ולכן קיים $\delta>0$ כך שעבור $|w-z|<\delta$ מתקיים

$$|f(z)-f(w)|<\epsilon$$

מצד שני, נקבע $N\in\mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{N}<\delta$ ונגדיר $h=f*h_N$. נשים לב כי h_N מתאפסת מחוץ לקטע $\left[-\frac{1}{N},\frac{1}{N}\right]$. מהסעיף הקודם h חלקה, וגם לכל $x\in\mathbb{R}$

מתקיים

$$\begin{aligned}
|h(x)-f(x)| &= \left|\int_{-1}^{1} f(x-y)\,h_N(y)\ dy-\int_{-1}^{1} f(x)\,h_N(y)\ dy\right| = \\
&= \left|\int_{-1}^{1} \left(f(x-y)-f(x)\right) h_N(y)\ dy\right| \leq \\
&\leq \int_{-1}^{1} |f(x-y)-f(x)|\,h_N(y)\ dy = \\
&= \int_{-\frac{1}{N}}^{\frac{1}{N}} |f(x-y)-f(x)|\,h_N(y)\ dy < \\
&< \epsilon \int_{-\frac{1}{N}}^{\frac{1}{N}} h_N(y)\ dy = \epsilon
\end{aligned}$$

הערה: על הדרך, הוכחנו למעשה כי $f * h_n$ מתכנסת במידה שווה ל־f.