שאלה 1

א. לא נכון. יהי $t\in(0,1)$ מספר לא רציונלי.

נגדיר

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq t\\ 1, & x=t\end{cases}$$

אז f אינטגרבילית רימן (כי היא שווה למעט נק' אחת לפי $\equiv 0$) אבל $f_n\equiv 0$.

$$\max_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=1\not\longrightarrow 0$$

ולכן f_n לא מתכנסת במ"ש ל-f.

ב. זה נכון.

$$I_n(f)=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)+f(b)\right]$$

נסמן:

$$K_n(f)=\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

$$L_n(f)=\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

$K_n(f)$, $L_n(f)$ הם פשוט סכומי רימן

כיון ש-f אינטגרבילית מתקיים $K_n(f),L_n(f)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^1 f(x)dx$

אבל

$$I_n(f)=\frac{K_n(f)+L_n(f)}{2}$$

לכן

$$I_n(f)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\int_0^1 f\,dx+\int_0^1 f\,dx}{2}=\int_0^1 f(x)dx$$

מש"ל.

שאלה 2

א. הסדרה $\sum a_n$ מתכנסת ולכן $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ובפרט קיים M כ"ש $|a_n| \le M$ לכל n.

לכל x: $|a_{2n} x^n| \le M|x|^n$

עבור $|x|<1$ $\sum |x|^n$ מתכנס (טור גאומטרי)

לכן מקריטריון ההשוואה נובע ש $\sum a_{2n} x^n$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס. עבור $|x|<1$.

ב. כן. הטור $\sum a_n x^n$ מתכנס בנק' 1, לפי משפט טור זה מתכנס במ"ש בקטע $[0,1]$.

המשפט האומר הוא:

"משפט: יהי $\sum a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות עם רדיוס התכ' $= R$. אם הטור מתכנס בנק' x_0+R אזי הוא מתכנס במ"ש בקטע $[x_0, x_0+R]$."

ג. לכל $|x|<1$ מתקיים ש- $1-x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, ולכן עבור כל $|x|<1$ קיים n_0 כך ש-

$$\forall n \ge n_0.\ \left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \le 2|x^n|$$

יהי M החסם מסעיף א'. אז

$$\forall n \ge n_0.\ \left|a_n \frac{x^n}{1-x^n}\right| \le 2M|x|^n$$

מקריטריון ההשוואה לטורים נובע ש- $\sum a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ מתכנס בהחלט עבור $|x|<1$, ובפרט מתכנס.

מש"ל.

שאלה 3:

א. תהי $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של נקודות ב- G_f.
כלומר $x_n \in K$ לכל n ו- $y_n = f(x_n)$.
צריך להראות שקיימת תת-סדרה המתכנסת לנק' בגרף.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב- K, ולכן, כיוון ש- K קומפקטית קיימת תת-סדרה $\{x_{n_k}\}$ וקיים $x \in K$ כך ש- $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$.

נסמן $y = f(x)$. אז $(x,y) \in G_f$, ונותר להראות ש- $(x_{n_k},y_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x,y)$.

אכן

$$\|(x_{n_k},y_{n_k})-(x,y)\|^2 \overset{\text{(חישוב פשוט)}}{=} \underbrace{\|x_{n_k}-x\|^2}_{\text{נורמה ב-}\mathbb{R}^n} + |y_{n_k}-y|^2$$

$$\|x_{n_k}-x\| \longrightarrow 0$$

$$|y_{n_k}-y| = |f(x_{n_k}) - f(x)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

מרציפות f.

לכן $(x_{n_k},y_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x,y)$. מש"ל.

ב. נגדיר $f_n(x) = \frac{1}{n}\cos(n^2\pi x)$

אז $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

לכן f_n מתכנס במ"ש ל- $f \equiv 0$.

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1+0^2}\,dx = 1$$

(המשך שאלה 3)

נראה ש- $L(f_n) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 1 = L(f)$.

$$L(f_n) = \int_0^1 \sqrt{1 + f_n'(x)^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + n^2\pi^2 \sin^2(n^2\pi x)}\, dx$$

$$\geq n\pi \int_0^1 |\sin(n^2\pi x)|\, dx$$

$$\geq n\pi \int_0^1 \sin^2(n^2\pi x)\, dx$$

$\left(\begin{array}{c} |\sin| \leq 1 \\ \text{ולכן} \\ |\sin| \geq \sin^2 \end{array} \right)$

$$= n\pi \int_0^1 \frac{1 - \cos(2n^2\pi x)}{2}\, dx$$

$$= \frac{n\pi}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

מש"ל.

[illegible] $f(x,y)=e^{\dots}$

תרגיל 4: מצאו פולינום בשני משתנים $P(x,y)$

כך שלכל $(x,y)\in B_{0.1}(0)$ מתקיים

$$|P(x,y)-f(x,y)|<\frac{1}{2000}$$

או: פתחו פולינום טיילור בשני משתנים כך ש השגיאה קטנה (כי אלו ועוד דרך כזה משנה 1)

פתרון: נפתח טור טיילור של f סביב $(0,0)$.

$$f=\exp\left(-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$$

$$f_x=-xf \qquad f_y=-yf$$

$$f_{xx}=-f+x^2f\ ,\quad f_{xy}=xyf\ ,\quad f_{yy}=-f+y^2f$$

כיון שאנו מצפים שהשגיאה בקירוב מסדר 1 תהיה 0.1^2 בערך, ננסה קירוב מסדר 2, שם השגיאה תהיה בערך 0.1^3.

$$f_{xxx}=xf+2xf-x^3f=3xf-x^3f$$

$$f_{xxy}=yf-x^2yf \qquad f_{yyx}=xf-y^2xf$$

$$f_{yyy}=3yf-y^3f$$

נציין של-f ∞ נגזרות רציפות לכן כל הנגזרות המעורבות שוות

$$R_2(x,y)=\frac{1}{6}\left(f_{xxx}(\theta x,\theta y)x^3+3f_{xxy}(\theta x,\theta y)x^2y+3f_{xyy}(\theta x,\theta y)xy^2+f_{yyy}(\theta x,\theta y)y^3\right)$$

עבור $0<\theta<1$.

לכן עבור $(x,y)\in B_{0.1}(0)$

$$|R_2(x,y)|\le\frac{1}{6}\left(4\cdot 0.1\cdot 0.1^3+3\cdot 2\cdot 0.1\cdot 0.1^3+3\cdot 2\cdot 0.1\cdot 0.1^3+4\cdot 0.1\cdot 0.1^3\right)$$

$$=\frac{20}{6}\cdot 0.1^4<0.00034<\frac{1}{2000}$$

לכן הפולינום המבוקש הוא

$$P_2(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(-x^2-y^2\right)=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

שאלה 5:

א)

$$b_n = \sum_{m=1}^{n} p(m)$$

נשים לב שהפונקציה $p(x)$ היא חיובית ומונוטונית <u>עולה</u>.
לכן נשתמש בשיטה הדומה לשיטה בה מוכיחים את מבחן האינטגרל לטורים.

$$b_n = \sum_{m=1}^{n} p(m) = \sum_{m=1}^{n} p(m) \int_m^{m+1} dx$$

$$\le \sum_{m=1}^{n} \int_m^{m+1} p(x)\,dx \le \int_1^{n+1} p(x)\,dx$$

$p(x)$ עולה

$$= \text{פולינום מסדר } K+1 \le C n^{K+1}$$

אינטגרל של פולינום מסדר K הינו פולינום מסדר $K+1$

באותו אופן מראים את אי השוויון מלמטה:

$$c n^{K+1} \le b_n$$

<u>פירוט:</u>

$$\int_0^{n+1} p(x)dx = \int_0^{n+1} \sum_{i=0}^{K} a_i x^i = \sum_{i=0}^{K} a_i \frac{(n+1)^i}{i+1} \le C n^{K+1}$$

כל מחובר קטן מקבוע כפול n^{K+1} ולכן גם הסכום.

<u>מש"ל.</u>

(המשך 5)

ב) a. $b_n \not\to 0$ לכן הטור לא מתכנס.

b. עבור $n>2100$ מתקיים

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{700}{n}\right)^n b_n < \left(\frac{5}{6}\right)^n b_n$$

כיון שהטורים חיוביים נוכל להפעיל את קריטריון ההשוואה, ולהסיק שאם $\sum \left(\frac{5}{6}\right)^n b_n$ מתכנס אז גם הטור שלנו מתכנס. (וגם בהחלט)

אגב

$$\sqrt[n]{\left(\frac{5}{6}\right)^n b_n} \le \frac{5}{6}\sqrt[n]{C n^{k+1}}$$

לכן

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\left(\frac{5}{6}\right)^n b_n} \le \frac{5}{6} < 1$$

מקריטריון השורש $\sum \left(\frac{5}{6}\right)^n b_n < \infty$.

c. $$\left|\frac{(-1)^n}{b_n}\right| \le \frac{1}{cn^{k+1}}$$

$\sum \frac{1}{n^{k+1}} < \infty$ מתכנס כי $k+1>1$.

מקריטריון ההשוואה הטור מתכנס בהחלט, לכן מתכנס.

d. $$\left|\frac{(-1)^n}{(b_n)^{1/k+2}}\right| = \frac{1}{(c)^{1/k+2}}\frac{1}{n^{\frac{k+1}{k+2}}}$$

~~[illegible]~~ $\frac{k+1}{k+2} < 1$

כלומר הטור איננו מתכנס ~~[illegible]~~ בהחלט.

המשך 5, ג, d.:

b_n סדרה מונוטונית עולה, לאינסוף

לכן $\frac{1}{\sqrt[k+2]{b_n}}$ יורדת מונוטונית

לאפס.

לפי קריטריון לייבניץ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[k+2]{b_n}}$$ מתכנס בתנאי.

מש"ל.