אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה: 4.8.2013
מבחן ב: חשבון אינפיניטיסמלי 2
מס' קורס: 201-1-0021
שנה: תשע"ג **סמסטר:** ב **מועד:** ב
שם המרצה: אור שליט
משך הבחינה: שלוש וחצי שעות
חומר עזר: מחשבון פשוט ללא צג גרפי

ענו על ארבעת השאלות הבאות. הקפידו להסביר כל צעד במהלך הפתרון, ולציין את המשפטים והטענות עליהם אתם מסתמכים. בכל סעיף/שאלה ניתן לכתוב "לא יודע/ת" ולקבל חמישית מהנקודות (מעוגלות מעלה לחצי הנקודה הקרובה).
סעיפים/שאלות בהם כתבתם "לא יודע/ת" לא ייבדקו. **בהצלחה!**

שאלה 1 (25 נק')
תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נגדיר

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x+\frac{i}{n}\right)$$

הוכיחו/הפריכו:
א. $f_n\to f$ נקודתית על הישר.
ב. $f_n\to f$ במידה שווה על הישר.
ג. לכל $a<b\in\mathbb{R}$ מתקיים ש- $f_n\to f$ במידה שווה בקטע (a,b).

פתרון:
ראשית, אציין שנפלה כאן טעות, ולא זו השאלה שהתכוונתי לשאול. התכוונתי לשאול האם ובאילו אופנים הסדרה f_n מתכנסת (אתם הייתם צריכים לגלות את הגבול). הסדרה כמובן **איננה** מתכנסת ל- f, אלא ל- $\int_x^{x+1} f(t)dt$.
בכל מקרה, השאלה כשרה כפי שהיא, כלומר אין בה טעות שגורמל לה להיות בלתי אפשרית או בעלת סתירה או קשה במיוחד, ודווקא קל לענות עליה.
היו סטודנטים שענו על השאלה שהתכוונתי לשאול ולא על השאלה ששאלתי, ואם הם ענו נכון הם קיבלו נקודות.

בקיצור: סטודנטים שהראו ש- f_n **איננה** מתכנסת נקודתית ל- f, וגם סטודנטים שהראו ש- f_n **כן** מתכנסת נקודתית ל- $\int_x^{x+1} f(t)dt$ קיבלו נקודות, כי שני הדברים נכונים: אלו ענו על השאלה שנשאלה ואלו ענו על השאלה שהתכוונתי לשאול. אני אציג כאן פתרונות לשתי השאלות.

<u>סעיף א</u> $f_n(x)$ שווה לסכום רימן של f בקטע $[x, x+1]$ עם חלוקה שווה ל-n קטעים ולכן לכל x קבוע, $f_n(x) \to \int_x^{x+1} f(t)dt$ (f רציפה ולכן אינטגרבילית בכל קטע שכזה). כלומר הסדרה f_n מתכנסת נקודתית לפונקציה $g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.

אבל הסדרה איננה מתכנסת נקודתית לפונקציה f עצמה, כי עבור רוב הפונקציות

$$\int_x^{x+1} f(t)dt \neq f(x)$$

לדוגמא, כאשר $f(x) = x$, אז

$$\int_x^{x+1} f(t)dt = \int_x^{x+1} tdt = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{x^2}{2} \neq x = f(x)$$

עכשיו קל לענות על סעיפים ב׳ ו- ג׳ בשאלה שכתובה: סדרת הפונקציות אינה מתכנסת ל- f נקודתית, ולכן גם לא במידה שווה: לא על הישר ולא בתת קטע.

כעת נענה גם על סעיפים ב׳ וג׳ של השאלה שלא כתובה.

<u>סעיף ב</u> לא נכון. נתבונן בפונקציה $f(x) = e^x$. אז

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{x+\frac{i}{n}} = e^x \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{1/n}\right)^i = e^x \frac{e^{1/n}(e-1)}{n(e^{1/n}-1)}$$

מצד שני, $\int_x^{x+1} f(t)dt = e^{x+1} - e^x$, ולכן

$$f_n(x) - \int_x^{x+1} f(t)dt = e^x\left(\frac{e^{1/n}(e-1)}{n(e^{1/n}-1)} - (e-1)\right)$$

אגף ימין איננו אפס, אך שואף לאפס (אינפי 1!), אבל ברור שלא במידה שווה (כי הוא כולל גורם של e^x).

<u>סעיף ג</u> נכון: סדרת הפונקציות f_n מתכנסת במידה שווה בכל קטע מהצורה (a, b) לפונקציה

$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$$

אכן, נקבע $a < b \in \mathbb{R}$. יהי $\mathcal{E} > 0$. הפונקציה f רציפה בקטע $[a, b+1]$, ולכן רציפה במ״ש שם. לכן קיים n_0 כך שלכל x, y בקטע $[a, b+1]$, אם $|x-y| < \frac{1}{n_0}$ אז

$$|f(x) - f(y)| < \mathcal{E}.$$

לכל $n > n_0$ ולכל $x \in (a, b)$ נחשב:

$$|f_n(x) - g(x)| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x+\frac{i}{n}\right) - \int_x^{x+1} f(t)dt\right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x+(i-1)/n}^{x+i/n} f\left(x + \frac{i}{n}\right) dt - \sum_{i=1}^{n} \int_{x+(i-1)/n}^{x+i/n} f(t)\, dt \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x+(i-1)/n}^{x+i/n} \left| f\left(x + \frac{i}{n}\right) - f(t) \right| dt$$

$$< (*) \sum_{i=1}^{n} \int_{x+(i-1)/n}^{x+i/n} \mathcal{E}\, dt = \int_{x}^{x+1} \mathcal{E} dt = \mathcal{E}$$

זה מוכיח התכנסות במ״ש בקטע $[a,b]$ ולכן גם בכל תת קטע שלו. (באי שוויון המסומן (*) השתמשנו ברציפות במ״ש, ובכך שכל הארגומנטים של הפונקציות שמופיעות באינטגרנד הם מהקטע $[a,b+1]$, ובכך ש- $\left|x+\frac{i}{n}-t\right| < \frac{1}{n_0}$ בתוך האינטגרל).

<u>שאלה 2</u> (25 נקי)

נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

א. (6 נקי) האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ מתכנס במידה שווה ב- $(0,\infty)$? נמקו!

ב. (7 נקי) הוכיחו ש- $f(x)$ מוגדרת על חצי הישר $(0,\infty)$, ושפונקציה זו רציפה וגזירה אינסוף פעמים שם.

ג. (6 נקי) האם קיים האינטגרל המוכלל $\int_1^{\infty} f(x)dx$? נמקו!

ד. (6 נקי) האם קיים האינטגרל המוכלל $\int_0^{1} f(x)dx$? נמקו!

<u>פתרון:</u>

<u>סעיף א</u> הטור אינו מתכנס במידה שווה. רוב הסטודנטים ענו באופן הבא (כאן בקצרה). אילו היה הטור מתכנס במ״ש ב- $(0,\infty)$, אז הוא היה קושי במ״ש שם, ובפרט המחובר ה-n-י היה מתכנס במ״ש לאפס:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,\infty)} |e^{-nx}| = 0$$

אבל זה לא מתקיים, כי הרי $\sup_{x\in(0,\infty)} |e^{-nx}| = 1$ לכל n. לכן אין התכנסות במ״ש.

דרך אחרת לראות זאת: לכל $x \in (0,\infty)$ הטור הוא טור גיאומטרי

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x})^n = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

לכן $f(x)$ מוגדרת על החצי ישר, ונתונה על-ידי $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$. אילו היה הטור מתכנס במ״ש בקטע $(0,\infty)$, אז כיון שכל סכום חלקי הוא פונקציה רציפה על $[0,\infty)$, הטור היה מתכנס במ״ש על $[0,\infty)$ והפונקציה הגבולית היתה ניתנת להמשכה רציפה וחסומה גם לנקודת הקצה 0 (ע״פ משפט על התכנסות במ״ש של

פונקציות רציפות בקטע פתוח). אבל f איננה חסומה בקטע $(0,\infty)$, לכן אין לה המשכה רציפה לקטע $[0,\infty)$. לכן הטור אינו מתכנס במ״ש בקטע $(0,\infty)$.

<u>סעיף ב</u> כבר ראינו ש-f מוגדרת בקטע $(0,\infty)$. למעשה, הנוסחא שמצאנו ל- f כבר מראה לנו ש- f רציפה וגזירה אינסוף פעמים בחצי ישר (סטודנט אחד שם לב לזה, וכמובן הנימוק הזה מזכה בכל הנקודות).

דרך נוספת לראות זאת:

ראשית, נראה שהטור מתכנס במידה שווה בכל קטע מהצורה: $[r,\infty)$, כאשר $r>0$. (שימו לב שזה **לא גורר** התכנסות במ״ש $(0,\infty)$!!!) אכן, אם $r>0$ קבוע, אז לכל x בקטע $[r,\infty)$ מתקיים $|e^{-nx}|\le|e^{-nr}|$, והצד הימני באי שוויון זה הוא איבר כללי של טור מתכנס (לפי מבחן ההשוואה עם $\frac{1}{n^2}$, למשל). לכן (ממבחן M של ויירשראס) הטור מתכנס במ״ש בקטע $[r,\infty)$.

כעת, לפי משפט האומר שטור של רציפות המתכנס במ״ש מתכנס לרציפה, הפונקציה הגבולית f היא רציפה בקטע $[r,\infty)$.

כעת נראה ש-f גזירה בקטע $[r,\infty)$. נתבונן בטור הנגזרות:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-nx})'=\sum_{n=1}^{\infty}-ne^{-nx}$$

טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nr}$ מתכנס (לפי ממבחן המנה, למשל), לכן ניתן שוב להשתמש במבחן M של ויירשראס ולהסיק שטור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty}-ne^{-nx}$ מתכנס במ״ש בקטע $[r,R]$, לכל $R>r$. כיון שהטור המקורי מתכנס אף הוא, נוכל להפעיל משפט על גזירת טור איבר איבר, ולהסיק ש-f גזירה ברציפות בקטע $[r,R]$ ושנגזרתה שם

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-ne^{-nx}$$

כיון שזה לכל $R>r$, זה מתקיים גם בחצי ישר $[r,\infty)$.

כעת לפי אינדוקציה (שאת פרטיה האינדוקטיביים לא ציפינו לקבל) רואים ש-

$$f^{(k)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^k e^{-nx}$$

שוב, $\sum_{n=1}^{\infty}n^{k+1}e^{-nr}$ מתכנס (לפי מבחן השורש, למשל) וזה מראה ש- $\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^{k+1}e^{-nx}$ מתכנס במ״ש ב- $[r,\infty)$, לכן מתכנס במ״ש ל- $f^{(k+1)}$, לפי הטיעונים לעיל. מאינדוקציה נובע ש-$f\in C^{\infty}([r,\infty))$. וזה לכל $r>0$.

שימו לב שזה **כן גורר** ש- $f\in C^{\infty}((0,\infty))$. (בניגוד להתכנסות במ״ש, גזירות היא תכונה מקומית).

<u>סעיף ג</u> האינטגרל המוכלל $\int_1^{\infty}f(x)dx$ קיים.

$f(x)=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\sim e^{-x}$ עבור $x\to\infty$ והאינטגרל $\int_1^{\infty}e^{-x}dx$ קיים, לכן לפי מבחן ההשוואה הגבולית נובע שהאינטגרל שלנו קיים.

שימו לב שהחלפת סדר סכום ואינטגרל איננה מוצדקת (אם כי היא נכונה במקרה זה) כיון שהמשפט על החלפת סדר גבול ואינטגרציה כאשר יש התכנסות במ״ש **לא נכון** על קטע אינסופי.

<u>סעיף ד</u> האינטגרל המוכלל $\int_0^1 f(x)dx$ לא קיים.

$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \sim \frac{1}{x}$ עבור $x \to 0$ והאינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ מתבדר לאינסוף, לכן ממבחן ההשוואה הגבולית גם האינטגרל שלנו מתבדר לאינסוף.

<u>הערה</u> הפונקציות שהופיעו בשני הסעיפים האחרונים חיוביות (ורציפות), לכן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי. השתמשנו בסימון "$g(x) \sim h(x)$ עבור $x \to b$" כקיצור ל-

$$\lim_{x\to b} \frac{g(x)}{h(x)} = c \in (0, \infty).$$

<u>שאלה 3</u> (25 נקי)

א. (5 נקי) ציירו (בערך) את העקומה:

$$S = \{(t \cdot \cos t, t \cdot \sin t) : 0 \le t \le 4\pi\}.$$

ב. (20 נקי) חשבו את אורך העקומה.

<u>שאלה 4</u> (25 נקי)

נתונה הפונקציה $f(x,y) = e^{x-2y} - xe^{-y}$.

א. (15 נקי) מצאו את כל נקודות הקיצון המקומיות של $f(x,y)$. עבור כל נקודת קיצון קבעו את הטיפוס שלה (מינימום חזק, מינימום חלש, וכולי...)

ב. (10 נקי) מצאו את הערכים המקסימאליים והמינימאליים שהפונקציה מקבלת בריבוע

$$S = \{(x,y) : 0 \le x, y \le 4\}.$$

<u>בהצלחה!</u>