בוחן ~~נומרי~~ פתרון אינפי 2, מועד 2014

שאלה 2:

א. נסמן $E_n(f_a) = I(f_a) - I_n(f_a)$

אנו יודעים מההרצאה ש-

$$E_n(f_a) = \frac{f_a''(\xi)}{24n^2} = \frac{6a\xi+2}{24n^2}$$

כאשר $\xi\in[0,1]$ (תלויה ב-a).

בכל מקרה מתקיים $E_n(f_a) \geq \frac{1}{12n^2}$

אשר יהיה גדול מ-$\frac{1}{100}$ אם ורק אם $n^2 < \frac{25}{3}$.

כלומר $n_0=2$ מקיים ש- $|E_n(f_a)| > 0.01$ לכל $a>0$ ולכל $n\leq n_0$.

2 הוא הערך המקסימלי המקיים זאת, לפי התשובה (החיובית) לסעיף ב.

ב. התשובה היא כן, אם $a>0$ מספיק קטן אז

$$\forall n > n_0=2 \,.\, |E_n(f_a)| < 0.01$$

אכן, אם $0<6a<0.15$, אז (כלומר $a<\frac{0.15}{6}$)

$$|E_n(f_a)| = \frac{6a\xi+2}{24n^2} < \frac{2.16}{24n^2} = \frac{0.09}{n^2} \leq 0.01$$

אם $n\geq 3$.

b. השגיאה היא לא.

יהי n_1 מספר כרצ׳. נראה שקיים $0<a$ כך ש- $|E_n(f_a)|>0.01$ עבור איזשהו $n\geq n_1$.

$$E_n(f_a) = \frac{6a\xi+2}{24n^2} = \frac{f_a''(\xi)}{24n^2}$$

נזכר בהוכחה של נוסחאת השגיאה עבור כלל נק׳ האמצע: $\xi\in[0,1]$ היא נק׳ המקיימת

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_a''(\xi_j) = f_a''(\xi)$$

כאשר $\xi_j\in[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}]$. בפרט $\xi_j \geq \frac{j-1}{n}$

לכן

$$6a\xi+2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(6a\xi_j+2)$$
$$\geq \frac{6a}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{j}{n} + 2 = \frac{6a}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}+2$$

אם $n>4$ אז $|E_n(f_a)| > \dfrac{\frac{3}{2}a+2}{24\cdot n^2}$.

לכן אם a גדול מספיק (למשל אם $a>24n^2$)
אז $|E_n(f_a)|>1$.