# אינפי 2 - תרגיל 1

## שאלות להגשה:

1. הסבירו לילד בן 8 או פחות מהו שטח.

2. הוכיחו כי שיטחו של משולש בעל צלע בסיס באורך $a > 0$ וגובה באורך $h > 0$ הינו $S(a,h) = \frac{k \cdot a \cdot h}{2}$ עבור $k \in \mathbb{R}$ כלשהו.

   רמז: השתמשו בתרגיל מהכיתה בו חישבנו את שטח המלבן.

3. הוכיחו ישירות מהגדרת האינטגרביליות כי הפונקציות הבאות $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ וחשבו את $\int_a^b f(x)dx$

   (א) $f(x) = x^n, \quad [0,1], n = 2,3,4$ בעזרת החלוקה לקטעים באורך שווה.

   (ב) $f(x) = \cos(x), \quad [0, \frac{\pi}{2}]$.

   (ג) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad [1,e]$ (נסו לחשוב איזו חלוקה תתאים כאן).

   (ד) (קשה) $f(x) = \ln(x), \quad [1,e]$.

   רמז: השתמשו בנוסחת הסכימה בחלקים - עבור סדרות $(a_k)$ ו-$(b_k)$ מתקיים

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \left(b_{k+1} - b_k\right) = a_{n+1}b_{n+1} - a_m b_m - \sum_{k=m}^{n} b_{k+1} \left(a_{k+1} - a_k\right)$$

4. תהיה $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ולכל $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה המקיימת $\int_a^b g(x)dx = 0$ מתקיים גם $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. הוכיחו כי $f$ קבועה.

   הערה: מצאו את ההבדל בין שאלה זו לשאלה שנפתרה בכיתה ונסו להבין מה יש לשנות בהוכחה בכדי להתאים אותה לשאלה הזו.

5. תהיה $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

   (א) אם $f$ אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$ אז גם $|f|$ אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$.

   (ב) אם $|f|$ אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$ אז גם $f$ אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$.

6. יהיו $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות רימן. הוכיחו כי $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ גם כן אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$.

7. חשבו את הגבולות הבאים:

   (א) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$

(ב) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + ... + \frac{n}{n^2+n^2}$

8. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ חסומה היא אינטגרבילית ב־$[a,b]$ אם ורק אם היא אינטגרבילית ב־$[a,c]$ וב־$[c,b]$ ומתקיים

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^c h(x)dx + \int_c^b h(x)dx .$$

## שאלות לא להגשה:

1. הוכיחו את תנאי קושי לאינטגרביליות רימן:

תהיה $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל זוג חלוקות $P$ ו־$Q$ המקיימות $\Delta(P) < \delta$ ו־$\Delta(Q) < \delta$ ולכל בחירת נקודות $Y_P$ המתאימה ל־$P$ ובחירת נקודות $Y_Q$ המתאימה ל־$Q$ מתקיים

$$|I(f,P,Y_P) - I(f,Q,Y_Q)| < \epsilon$$

רמז: העזרו בתנאי קושי להתכנסות סדרות

2. מה ניתן להסיק מכך שעבור $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ חסומה קיימת חלוקה $P$ כך ש־$U(f,P) = L(f,P)$?

3. תהיה $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

(א) נניח כי קיימת קבוצה סופית $A \subset [a,b]$ כך ש־$f$ רציפה ב־$[a,b] \setminus A$. הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית ב־$[a,b]$.

(ב) נניח כי קיימת קבוצה בת־מניה $A \subset [a,b]$ כך ש־$f$ רציפה ב־$[a,b] \setminus A$. הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית ב־$[a,b]$.

(ג) למעשה, ניתן לתת תנאי מדויק בנוגע לקשר בין רציפות של פונקציה לאינטגרביליות שלה.

נוכיח את קריטריון לבג לאינטגרביליות של פונקציות:

נסמן ב־$A$ את אוסף נקודות אי־הרציפות של פונקציה חסומה $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. מתקיים כי $f$ אינטגרבילית רימן ב־$[a,b]$ אם ורק אם מתקיים:

לכל $\epsilon > 0$ קיימת קבוצה בת מנייה של קטעים פתוחים $I_n = (c_n, d_n) \subset [a,b]$ כך ש־$A \subset \bigcup\limits_n I_n$ וגם $\sum\limits_n (d_n - c_n) < \epsilon$. תנאי זה נקרא "ל־$A$ יש מידה 0".

לצורך ההוכחה, נגדיר את מושג התנודה בנקודה של פונקציה: נאמר שהתנודה של פונקציה $f$ ב־$x$ היא

$$\omega\left(f,x\right)=\inf\left\{\sup_{x',x''\in[x-\delta,x+\delta]}\left(\left|f(x')-f(x'')\right|\right):\delta>0\right\}.$$

i. הוכיחו את העובדות הבאות בנוגע לקבוצות בעלות מידה 0:
א'. לכל קבוצה בת־מניה יש מידה 0.
ב'. אם ל־$B$ מידה 0 ו־$A\subseteq B$ אז ל־$A$ מידה 0 גם כן.
ג'. יהיו $A_k$ בעלות מידה 0 אזי גם ל־$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ מידה 0.

ii. הוכיחו כי $f$ רציפה ב־$x_0$ אם ורק אם $\omega\left(f,x_0\right)=0$.

iii. הוכיחו כי אם $f$ אינטגרבילית אז לאוסף נקודות אי הרציפות שלה יש מידה 0.
הדרכה: שימו לב כי

$$\{x\in[a,b]:\omega\left(f,x\right)>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\in[a,b]:\omega\left(f,x\right)>\frac{1}{k}\right\}$$

הראו כי לכל אחת מן הקבוצות מימין יש מידה 0.

iv. הראו כי אם ל־$A$ יש מידה 0 אזי $f$ אינטגרבילית.
הדרכה: בהינתן $\epsilon>0$ כסו את

$$\{x\in[a,b]:\omega\left(f,x\right)>\epsilon\}$$

כמובטח בהגדרת "מידה 0". השתמשו במשפט היינה־בורל (דף בונוס שלישי במסטר שעבר) בכדי להסיק שניתן לכסות את $A$ על ידי מספר סופי של קטעים $U_i$ בעלי אורך כולל הקטן מ־$\epsilon$.
הראו כי את שאר הקטע ניתן לחלק לקטעים בהם התנודה קטנה מ־$\epsilon$ ועל כן בנינו חלוקה $P$ המקיימת

$$U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<1\epsilon\left(\left(\sup_{x\in[a,b]}\left(f(x)\right)-\inf_{x\in[a,b]}\left(f(x)\right)\right)+(b-a)\right)$$