אינפי 2 - תרגיל 2

שאלות להגשה:

1. הוכיחו כי

$$\int_a^b f(x)\ \ dx = c\int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} f(cy)\ \ dy$$

$$\int_a^b f(x+c)\ \ dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\ \ dx$$

כלומר, בכל אחד מהמקרים, הוכיחו כי קיום האינטגרל בצד שמאל של המש-
וואה שקול לקיום האינטגרל בצד ימין וכי הם שווים.

2. (א) תהיה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה וחיובית (ממש) המקיימת

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

הראו כי $f\equiv 0$.

(ב) יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות המקיימות $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$
כך ש-f אינה שווה באופן זהותי ל-g, הוכיחו כי

$$\int_a^b f(x) < \int_a^b g(x)\,dx .$$

3. תהיה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו כי f היא פונקציה אי זוגית אם ורק אם
לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$. האם דרישת הרציפות הכרחית כאן?

4. תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f(x^n)\,dx\right) = f(0)$$

5. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ותהי $F\left(x\right)=\int\limits_0^x f\left(t\right)\ dt$.

(א) הראו ש-F זוגית אם ורק אם f אי-זוגית וש-f זוגית אם ורק אם F אי-זוגית.

(ב) הראו שאם F מחזורית אז f מחזורית. מצאו תנאי הכרחי ומספיק בכדי שגם ההיפך יהיה נכון.

(ג) היכן בסעיפים הקודמים השתמשתם בעובדה ש-f רציפה?

6. ציירו וחשבו את שטחי הצורות הבאות במישור:

(א) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|-1\le x\le 1, x^2-1\le y\le\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}$

(ב) האליפסה הנתונה על ידי המשוואה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ עבור $a,b>0$.

השאלות לא להגשה:

1. תהיה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה מחזורית T ונניח כי היא אינטגרבילית בקטע $[0,T]$. הוכיחו כי היא אינטגרבילית בכל קטע סגור (וחסום) ושמתקיים

$$\forall a\in\mathbb{R}:\quad \int\limits_0^T f\left(x\right)\ dx=\int\limits_a^{a+T} f\left(x\right)\ dx$$

2. גזרו את הפונקציות הבאות

(א) $F\left(x\right)=\int\limits_0^{e^x}\cos t\ dt$

(ב) $F\left(x\right)=\int\limits_x^{x^2} e^t\ dt$

3. תהי f פונקציה רציפה ב-$[a,b]$. הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)\right|^n\ dx\right)^{\frac{1}{n}}=\max_{x\in[a,b]}\left|f\left(x\right)\right|$$

4. תהי $\varphi\left(x\right)=\int\limits_{\sin x}^{\cos x}e^{-t^2}dt$. הוכיחו כי φ גזירה ב-$\mathbb{R}$ וחשבו את נגזרתה.

5. בהינתן $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירות ו-$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית עם פונקציה קדומה F הוכיחו כי הפונקציה

$$\varphi(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$$

גזירה ב-$\mathbb{R}$ וחשבו את נגזרתה.

6. תהי $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה. השתמשו בהצבה מתאימה בשביל להוכיח כי

$$\int\limits_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

7. לפי המשפט של ארכימדס, השטח הכלוא בין פרבולה כלשהי לבין קו ישר החותך אותה בשתי נקודות שווה ל-$\frac{4}{3}$ כפול השטח של המשולש בעל הגובה המקסימלי החסום על ידי הפרבולה והקו הישר, אשר בסיסו על הקו הישר וקדקודו על הפרבולה. הוכיחו באמצעות השיטות של החדו"א את משפט ארכימדס במקרים הבאים. (תוכלו להשתמש בכך שהקדקוד C של המשולש הוא הנקודה בה המשיק לפרבולה מקביל לישר AB).

(א) הוכיחו עבור המקרה בו הפרבולה נתונה ע"י $y = ax^2$ והישר נתון ע"י $y = b$.

(ב) הוכיחו עבור המקרה בו הפרבולה נתונה ע"י $y = ax^2$ והישר נתון ע"י $y = ax$.

(ג) (קשה יותר) הוכיחו עבור המקרה בו הפרבולה נתונה ע"י $y = ax^2$ והישר נתון ע"י $y = ax + b$.

(ד) האם יש עוד מקרים שצריך לבדוק?

8. מכונית מרוץ מתחילה לנוע ממנוחה על מסלול ישר שאורכו 100 מטר. התאוצה של המכונית נתונה על-ידי הנוסחה: $a(t) = t\left(1 - e^{-t}\right)$, ביחידות של מטר חלקי שנייה בריבוע. האם המכונית תספיק להגיע למהירות של 100 מטר לשנייה לפני שתגיע לקצה המסלול? (להזכירכם: התאוצה היא הנגזרת של המהירות, והמהירות היא הנגזרת של המיקום. מי שלא מבין מה לעשות עם היחידות יכול להתעלם מהן).

9. תהיה f רציפה בכל $\mathbb{R}$. לכל $\delta > 0$ נגדיר

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta} \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(x)\ dx$$

הראו ש-F_δ רציפה בכל נקודה וכי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\lim_{\delta \to 0^+} F_\delta (x) = f(x)$$

10. תהיה $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ותהי $F(x) = \int\limits_0^x f(x)\ dx$. הראו שאם $c \in [a,b]$ נקודת אי-רציפות מין הסוג הראשון של f אזי F אינה גזירה ב-c.

11. הוכיחו את משפט הסנדוויץ' הבא: יהיו f, g, h פונקציות המקיימות $f \le g \le h$ ב-$[a,b]$. נניח ש-f ו-h אינטגרביליות ב-$[a,b]$ ובנוסף נניח כי

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^b h(x)\ dx$$

אזי גם g אינטגרביליות ב-$[a,b]$ ו-

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^b g(x)\ dx = \int\limits_a^b h(x)\ dx$$