אינפי 2 - תרגיל 3

שאלות להגשה:

1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^5}dx$

(ב) $\int \arcsin(x)dx$

(ג) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$

(ד) $\int \frac{x^4+5x+1}{x^2+2x+2}dx$

(ה) $\int \sqrt{4-\sqrt{x}}dx$

(ו) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt[n]{x}}$ עבור $n \in \mathbb{N}$

(ז) $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x}$

(ח) $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}$

2. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן

$$a_n = \int\limits_0^1 x^n \sin x \ dx; \qquad b_n = \int\limits_0^1 x^n \cos x \ dx$$

חשבו את a_0, b_0, ומצאו יחסים רקורסיבים בין a_n ל b_n אשר יאפשרו לחשב אותם לכל $n \in \mathbb{N}$.

3. יהיה $p(x)$ פולינום שדרגתו n, הוכיחו כי

$$\int e^x \cdot p(x)\, dx = e^x \cdot \left(p(x) - p'(x) + p''(x) - ... + (-1)^n p^{(n)}(x)\right)$$

4. נסחו והוכיחו טענה שתוכנה הוא: כל אינטגרל של פונקציה רציונלית במשתנים $\cos x$ ו־$\sin x$ ניתן לפתור בעזרת ההצבה $u = \tan\frac{x}{2}$. איך נראית פונקציה קדומה של פונקציה כזו?

5. (א) פתחו נוסחא לשטח הפנים של גוף סיבוב המתקבל מסיבוב גרף הפונקציה $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ סביב ציר ה־x ("הוכחה של פיזיקאים") תחת ההנחה שפונקציות מתנהגות באופן מקומי כמו פונקציה קבועה.

(ב) הראו שהנוסחא שמצאתם לא עובדת עבור שטח פנים של חרוט.

(ג) פתחו נוסחא עבור שטח הפנים של גוף סיבוב תחת ההנחה שהפונקציה מתנהגת מקומית בצורה לינארית (בדומה לנוסחא עבור אורך גרף) והדגימו שהנוסחא עובדת עבור שטח הפנים של חרוט.

6. נאמר שלגרף של פונקציה יש אורך אינסופי אם

$$\forall M>0\ \exists\delta>0\ \forall\text{partition } P:\ \ \Delta\left(P\right)<\delta\Rightarrow l\left(f,P\right)>M$$

כאשר l אורך העקומה שנקבעת על ידי החלוקה P.

(א) הראו כי לגרף הפונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0, & x=0\\ \sin\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$$

יש אורך אינסופי.

(ב) הראו כי אם גרף של פונקציה רציפה על קטע סופי אינו בעל אורך אז הוא בעל אורך אינסופי.

(ג) הוכח או הפרך: לגרף של פונקציה רציפה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ יש אורך סופי.

(ד) (לא חובה) : מצאו פונקציה שאינה בעלת אורך אך גם אינה בעלת אורך אינסופי.

<u>השאלות לא להגשה:</u>

1. הוכיחו כי אם $p(x)$ הוא פולינום ממעלה n, אז קיים פולינום $q(x)$, גם הוא ממעלה n כך ש

$$\int p\left(x\right)e^{x}\ dx=q\left(x\right)e^{x}+C$$

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}$$

2. בשאלה זו נוכיח את קיום הפירוק של פונקציות רציונלאיות.

(א) i. יהיו $a_1,a_2,...,a_n$ מספרים מרוכבים שונים. לכל $i=1,...,n$ נסמן

$$g_{i}\left(x\right)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(x-a_{j}\right)$$

הוכיחו כי $g_{i(}i=1)^{n}$ מהווה קבוצה בלתי תלויה לינארית. הסיקו מכך כי $g_{i(}i=1)^{n}$ מהווה בסיס למרחב הפולינומים עם מקדמים מרוכבים ממעלה קטנה או שווה ל- $n-1$.

ii. יהי q פולינום ממעלה n, ויהי p פולינום ממעלה קטנה ממש מ־n. נניח של־q יש n שורשים שונים $a_1, a_2, ..., a_n$. הוכיחו שקיימים קבועים $A_1, A_2, ..., A_n$ (אולי מרוכבים) הנקבעים ביחידות, כך שניתן לרשום את הפונקציה הרציונאלית $\frac{p}{q}$ באופן הבא

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + ... + \frac{A_n}{x-a_n}$$

iii. נניח ש־$a = b + ic$, ויהי $\overline{a} = b - ic$ הצמוד המרוכב של a. בהינתן A_1, A_2, הראו שקיימים B, C כך ש־

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{x-\overline{a}} = \frac{Bx+C}{(x-b)^2+c^2}$$

iv. יהי q פולינום עם מקדמים ממשיים מדרגה n, ויהי p פולינום עם מקדמים ממשיים מדרגה קטנה מ־n. יהיו $b_j \pm ic_j$, $j = 1, ..., k$ השורשים המרוכבים של q, ויהיו $a_1, ..., a_{n-2k}$ השורשים הממשיים של q. הוכיחו שקיימים קבועים $A_1, ..., A_{n-2k}, B_1, ..., B_k, C_1, ..., C_k$ כך ש־

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + ... + \frac{A_{n-2k}}{x-a_{n-2k}} + \frac{B_1x+C_1}{(x-b_1)^2+c_1^2} + \frac{B_kx+C_k}{(x-b_k)^2+c_k^2}$$

הוכיחו כי הקבועים הללו ממשיים.

(ב) i. יהיו $a_1, a_2, ..., a_k$ מספרים ממשיים שונים, ויהיו $n_1, \ldots, n_k$ מספרים טבעיים (שונים מאפס). נסמן $n = n_1 + ... + n_k$. לכל $j = 1, \ldots, k$ ולכל $i = 1, \ldots, n_j$ נסמן

$$g_{j,i}(x) = (x-a_j)^{n_j-i} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{k} (x-a_m)^{n_m}$$

הוכיחו כי $\{g_{j,i} | j = 1, ..., k,\ i = 1, ..., n_j\}$ מהווה קבוצה בלתי תלויה ליניארית. הסיקו מכך כי $\{g_{j,i} | j = 1, ..., k,\ i = 1, ..., n_j\}$ מהווה בסיס למרחב הפולינומים עם מקדמים ממשיים ממעלה קטנה או שווה ל־ $n-1$.

ii. יהי q פולינום עם מקדמים ממשיים ממעלה n, ויהי p פולינום עם מקדמים ממשיים ממעלה קטנה ממש מ־ n. נניח של־ q יש k שורשים ממשיים שונים $a_1, ..., a_k$, ונניח שהריבוי של a_j הוא n_j. הוכיחו

שקיימים קבועים $A_(j,i), j = 1,\dots,k, i = 1,\dots,n_j$ הנקבעים ביחידות, כך שניתן לרשום את הפונקציה הרציונאלית $\frac{p}{q}$ באופן הבא

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{A_{j,i}}{(x-a_j)^i}$$

(ג) בסעיף א' הוכחתם את משפט הפירוק עבור פונקציות רציונאליות במקרה המיוחד בו למכנה שורשים שונים. בסעיף ב' הוכחתם את משפט הפירוק עבור פונקציות רציונאליות במקרה המיוחד בו למכנה יש רק שורשים ממשיים. הוכיחו את משפט הפירוק עבור פונקציות רציונאליות בכלליות מלאה.

3. בשאלה הזו נוכיח כי העקומה הקצרה ביותר בין שתי נקודות היא קו־ישר. הראו שאם $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ היא פונקציה חסומה המקיימת $f(0)=0$ ו־$f(1)=1$ ונניח כי l הוא אורך הגרף של f, הראו כי $l \geq \sqrt{2}$ וכי שיוויון מתקבל רק על ידי פונקציה לינארית.

מה ההנחה הסמויה שעשינו כאן? האם היא מוצדקת?

4. הוכיחו את האינטגרלים בטבלה

$f(x)=\frac{s(x)}{t(x)^k}$	$\int f(x)\,dx$
$p(x)$	אינטגרל מיידי
$\frac{1}{(x+a)^k}$	$\begin{cases}\ln\|x+a\|, & k=1\\ \frac{1}{1-k}\frac{1}{(x+a)^{k-1}}, & k>1\end{cases}$
$\frac{1}{(x^2+ax+b)}$	$\frac{1}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\right)$
$\frac{1}{(x^2+ax+b)^k}, k>1$	$\frac{2x+a}{(k-1)(4b-a^2)(x^2+ax+b)^{k-1}}+\frac{4k-6}{(k-1)(4b-a^2)}\int\frac{1}{(x^2+ax+b)^{k-1}}dx$
$\frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^k}$	$\begin{cases}\ln\left\|x^2+ax+b\right\|, & k=1\\ \frac{1}{1-k}\frac{1}{(x^2+ax+b)^{k-1}}, & k>1\end{cases}$
$\frac{x+c}{(x^2+ax+b)^k}$	$\frac{1}{2}\int\frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^k}dx+\left(c-\frac{a}{2}\right)\int\frac{1}{(x^2+ax+b)^k}$

5. חשבו את האינטגרלים הבלתי מסויימים הבאים:

(א) $\int\frac{x}{\sin^2 x}dx$

(ב) $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}dx$

(ג) $\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$

(ד) $\int \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$

(ה) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

(ו) $\int x\tan^2 x dx$

(ז) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

(ח) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

(ט) $\int \sin^n x\cos^m x dx$ כאשר n או m אי־זוגי

(י) $\int \frac{dx}{x^4+1}$

(יא) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+2}{(x^2-x+1)^2}dx$

(יב) $\int \frac{x^2-2}{x+1}dx$

(יג) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

(יד) $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

6. חשבו את אורך העקומה $y=x^2$ מהנק' $(0,0)$ לנקודה $(1,1)$ בעזרת שתי ההצבות הבאות:

(א) הצבת אוילר.

(ב) הצבה טריגונומטרית אוניברסלית $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

7. מצאו את נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב התחום החסום על ידי המשוואה $y=x^2-4x+5$ בין הישרים $x=1$ ו־ $x=4$ סביב ציר ה־x.