

אינפי 2 - תרגיל 4

שאלות להגשה:

1. עבור כל אחד מהאינטגרלים הבאים, השתמשו בשיטת הטרפז על מנת לחשבו בדיוק טוב יותר מ- 10^{-3} . העריכו גם את גודל השגיאה שקיבלתם.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad (\text{א})$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{\ln x} \quad (\text{ב})$$

$$\int_0^1 x^x dx \quad (\text{ג})$$

חיזרו על כך עוד פעמיים, פעם השתמשו בשיטת סימפסון, ופעם השתמשו בשיטת נקודת האמצע ("כלל המלבן"). חישובו האם יש חלוקה יותר טובה לקטעים מאשר החלוקה ל- n קטעים שווים באורכם.

2. השתמשו בשיטת הטרפז עם 2, 4, 8, 16, 32 נקודות על מנת להעריך את $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ השוו לערך האמיתי. האם קצב ההתכנסות תואם את מה שלמדנו בכיתה? מדוע לא? מדוע כן?

3. גוף נע במסלול חד-ממדי בכיוון ציר x . נתונות הדגימות הבאות של המהירות (הנתונה ביחידות של מטר לשנייה):

time(sec)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
velocity(meter/sec)	0	0.7	1.4	2.9	4.4	7	10.3

עליכם להעריך את $x(3)$. באיזו שיטה תשתמשו? האם תוכלו לאמר משהו על השגיאה?

4. "כלל הנקודה השמאלית" לחישוב נומרי של אינטגרל על הקטע $[a, b]$ נתון על-ידי הנוסחה:

$$I_n(f) = h \sum_{j=0}^{n-1} f(a + jh)$$

כאשר $h = \frac{b-a}{n}$. חשבו את נוסחת השגיאה של שיטה זו. הראו שאם f גזירה ברציפות אז קצב ההתכנסות של I_n לערך האמיתי של האינטגרל הוא קבוע כפול n^{-1} . הראו על-ידי דוגמא שאי אפשר לקבל קצב התכנסות מהיר יותר.

5. תהיה f גזירה פעמיים ברציפות בסביבה של $[a, b]$, נכתוב

$$f(x) = p_1(x) + \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\xi_x)$$

כאשר p_1 הוא פולינום האינטרפולציה מסדר ראשון המסכים עם הפונקציה f בקצוות הקטע. ξ_x תלוי ב- x , הוכיחו כי $g(x) = f''(\xi_x)$ רציפה כפונקציה של x . (היזהרו!)

6. הוכיחו כי החסם על השגיאה בכלל הטרפז הוא חזק, כלומר לא ניתן לשיפור.

שאלות לא להגשה:

1. העריכו בעזרת אחת מהשיטות שלמדנו (כלל נקודת האמצע, כלל הטרפז או כלל סימפסון) את

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

שימו לב לכך שהפונקציה אינה חסומה. האם תוכלו להעריך את השגיאה? לבסוף, חשבו את האינטגרל בצורה אנליטית והשוו עם מה שקיבלתם?

2. תהיה $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית אך לא ממחלקת C^2 , מה ניתן לאמר על השגיאה בחישוב האינטגרל בעזרת כלל נקודת האמצע/כלל הטרפז?

3. תהיה g אינטגרבילית ב- $[a, b]$ וחיובית ב- (a, b) . תהיה f חסומה ב- $[a, b]$ ורציפה ב- (a, b) . הוכיחו כי קיים $c \in (a, b)$ כך ש-

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

תנו דוגמה לכך שלא ניתן להחליף את a בנקודה פנימית בקטע. הסבירו מה הקשר לתרגיל 5 להגשה.