

אינפי 2 - תרגיל 5

שאלות להגשה:

1. הוכיחו כי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית- KH על $[a, b]$ אם ורק אם $a < b$ וכל $c < b$ מתקיים ש- f אינטגרבילית- KH ב- $[a, c]$ ו- $[c, b]$ ובנוסף

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

2. תהיה $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית- KH על $[a, b]$ ויהיה $\epsilon > 0$. נניח ש- δ היא פונקציית-כיוול כד שלכל חלוקה מסומנת (P, Y) δ -עדינה מקיימת

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I(f, P, Y) \right| < \epsilon$$

הראו כי לכל $[c, d] \subseteq [a, b]$ אם (Q, Z) חלוקה δ -עדינה של $[c, d]$ אז

$$\left| \int_c^d f(x) dx - I(f, Q, Z) \right| < 2\epsilon$$

3. תהיה $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ הנתונה על ידי

$$f(x) = \begin{cases} m, & x = \frac{1}{m} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

הוכיחו (בשתי דרכים שונות) כי f אינטגרבילית- KH בקטע והראו כי

$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$

4. חשבו את אינטגרל רימאן הבא

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

רמז: $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ מופיעה בנגזרת של פונקציה מוכרת, נסו לנצל זאת והשתמשו במשפט היסודי.

5. אנו למדנו שתי גרסאות של המשפט היסודי, הן לאינטגרל רימן והן לאינטגרל קורצווייל-הנסטוק. באיזו גרסה המעבר לאינטגרל קורצווייל-הנסטוק מוביל לשיפור משמעותי יותר? נמקו.

שאלות להגשה:

1. עבור אילו ערכים של α האינטגרל- KH הבא קיים? חשבו אותו

$$\int_0^1 x^\alpha dx$$

2. תהיה $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית- KH על $[a, b]$ ותהיה $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $f(x) = g(x)$ על $[a, b]$ פרט למספר סופי של נקודות. הוכיחו כי גם g אינטגרבילית- HK על $[a, b]$ ובנוסף

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

3. תהיה $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית- KH על $[a, b]$ ונגדיר

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

הראו כי F רציפה.