אינפי 2 - תרגיל 7

שאלות להגשה:

1. נניח כי f גזירה פעמיים ב־$[a,b]$. הוכיחו כי לכל קטע $[\alpha,\beta]\subsetneq[a,b]$, סדרת הפונקציות $f_n(x)=n\left(f(x+\frac{1}{n})-f(x)\right)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[\alpha,\beta]$.
מהי פונקצית הגבול?

2. תהיה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה. תהי $F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$. לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in[0,1]$ נגדיר

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}x\right)$$

הוכיחו כי $F_n\rightrightarrows F$ ב־$[0,1]$.

3. נניח כי $f_n\rightrightarrows f$ וכי $g_n\rightrightarrows g$. נניח גם כי f ו־g הן פונקציות חסומות. הוכיחו כי $f_n\cdot g_n\to f\cdot g$ במידה שווה.

האם החסימות כאן הכרחית?

4. הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^x\ln(n)}$$

מתכנס לפונקציה רציפה ב־$(1,\infty)$ אך ההתכנסות היא לא במידה שווה.

5. תהיה (a_n) סדרה. טור מהצורה

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

נקרא **טור דיריכלה**. הוכיחו את התכונות הבאות:

(א) אם הטור מתכנס בהחלט עבור $x_0\in\mathbb{R}$ אז הוא מתכנס בהחלט לכל $x>x_0$.

(ב) נגדיר

$$\sigma_a=\inf\left\{x\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n^x}\right|<\infty\right.\right\}$$
$$\sigma_c=\inf\left\{x\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}\text{ converges}\right.\right\}$$

נניח כי לטור יש נקודת התכנסות ונקודת התבדרות (כלומר לא כל הנקודות הן נקודות התכנסות ולא כל הנקודות הן נקודות התבדרות) הוכיחו כי

$$\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$$

בפרט שימו לב שהקיום של נקודה בה הטור מתכנס מבטיח קיום של נקודה בה הטור מתבדר. רמז: הראו כי אם הטור מתכנס בנקודה x הוא מתכנס בנקודה $x+1+\epsilon$ לכל $\epsilon > 0$.

(ג) בתנאים של הסעיף הקודם, הסיקו כי קיים x_0 כך שהטור מתכנס בהחלט לכל $x > x_0$ ולא מתכנס בהחלט לכל $x < x_0$.

(ד) הוכיחו כי אם $\frac{a_n}{n^k}$ סדרה חסומה אז $\sigma_a \leq k+1$ ובפרט הטור מתכנס לפונקציה רציפה ב־$(k+1,\infty)$. היכן ניתן להבטיח שהפונקציה גזירה?

(ה) (לא להגשה) הוכיחו כי אם (a_n) מקיימת את התנאי: "לכל $m,n \in \mathbb{N}$ זרים מתקיים $a_{mn} = a_n a_m$" אז

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \prod_{p \text{ is a prime}} \frac{1}{1-a_p p^{-x}}$$

רמז: עבור $y > 0$ התבוננו בהפרש

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \prod_{p \leq y} \frac{1}{1-a_p p^{-x}}$$

והראו שהגבול כאשר $y \to \infty$ הוא 0.

(ו) (לא להגשה) נגדיר $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, הוכיחו כי $\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = \infty$ אם ורק אם יש אינסוף ראשוניים.

6. הוכיחו את כלל לייבניץ המלא:

תהיה $f(x,\theta)$ פונקציה גזירה ברציפות במשתנה θ ויהיו $a(\theta), b(\theta)$ פונקציות גזירות, אזי:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(x,\theta)\,dx\right) = \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \theta}(x,\theta)\,dx + f(b(\theta),\theta)\,b'(\theta) - f(a(\theta),\theta)\,a'(\theta)$$

שאלות לא להגשה:

1. עבור סדרות הפונקציות הבאות והקטעים הבאים קבעו האם הם מתכנסים, אם כן מצאו את הגבול וקבעו האם ההתכנסות היא במידה שווה.

(א) $f_n = \sin^n(x)$, $I = [0, \frac{\pi}{2} - \epsilon$, $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$.

(ב) $f_n = \frac{x+n}{n}$, $I = [a,b]$.

(ג) $f_n = \frac{x+n}{n}$, $I = \mathbb{R}$.

(ד) $f_n = n^2 x^2 e^{-xn}$, $I = [r, \infty)$, $0 \le r$.

(ה) $\sqrt{n} e^{-nx}$, $I = [0,1]$.

(ו) $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$, $I = [1, \infty)$.

(ז) $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{n}\right)^n$, $I = [a,b]$.

(ח) $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^x}$, $I = [1+\epsilon, \infty)$, $\epsilon > 0$.

רמז: התחילו מכך שהטור מתכנס אם ורק אם $x > 1$.

2. תהיה (a_n) סדרת מספרים ממשיים. נגדיר סדרת פונקציות $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על ידי $f_n \equiv a_n$. נתחו התכנסות/התכנסות במידה־שווה של f_n.

3. (א) הוכיחו את משפט דיני: "תהי f_n סדרה מונוטונית (כלומר $f_n \le f_{n+1}$ לכל n או $f_n \ge f_{n+1}$ לכל n) של פונקציות רציפות על קטע $[a,b]$ המתכנסת באופן נקודתי לפונקציה רציפה f. אזי הסדרה f_n מתכנסת במידה שווה ל־f."
רמז: בהינתן $\epsilon > 0$, לכל $x \in [a,b]$, יש $n(x)$ כך ש־ $\left|f_{n(x)} - f(x)\right| < \epsilon$. כעת יש להתבונן על כל הנקודות y המקיימות $\left|f_{n(y)} - f(y)\right| < \epsilon$. המשיכו מכאן.

(ב) הראו על־ידי דוגמא שאם מחליפים את הקטע הסגור $[a,b]$ בקטע הפתוח (a,b) אזי התכנסות מונוטונית של סדרת רציפות לרציפה אינה גוררת התכנסות במידה שווה.

(ג) הראו על־ידי דוגמא שאם לא מניחים שפונקציית הגבול רציפה אזי התכנסות מונוטונית של סדרת רציפות על קטע סגור איננה בהכרח במידה שווה.

4. נסחו והוכיחו גרסא של כלל לייבניץ עבור טורי פונקציות, כלומר תנו תנאי על סדרת פונקציות (u_k) שתבטיח התכנסות נקודתית של הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k(x)$.

5. השאלה הבאה מדגימה שמשפט בולצאנו־ויירשטראס איננו תקף עבור סדרות של פונקציות. התבוננו בסדרת הפונקציות המוגדרת באופן הבא:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} ; \quad \forall n : f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(2x), & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ f_n(2x-1), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

הראו כי סדרה זו אינה מתכנסת נקודתית ב־$[0,1]$ ויתר על־כן, לא קיימת לה אף תת־סדרה מתכנסת.

6. תהיה $f_n : [a,b] \to [c,d]$ סדרת פונקציות המתכנסת במידה שווה ל־f בקטע $[a,b]$ ותהיה $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו כי $g \circ f_n \rightrightarrows g \circ f$. הוכיחו כי הדרישה לרציפות הכרחית. הראו גם כי לא ניתן להחליף את $[c,d]$ בקטע פתוח.

7. הוכיחו שאם g פונקציה גזירה ברציפות על הישר, מחזורית עם מחזור באורך 1, ומקיימת את המשוואה הפונקציונלית

$$g(x) = g(x/2) + g((x+1)/2)$$

אזי $g \equiv 0$.

8. תהי a_n מנייה של המספרים הרציונלים (כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתאימים $a_n \in \mathbb{Q}$, ולכל $q \in \mathbb{Q}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ יחיד כך ש $a_n = q$, במילים אחרות: $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ היא פונקציה חח"ע ועל), ותהי

$$f\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin\left(\frac{1}{x - a_n}\right)$$

הוכיחו כי f רציפה על $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, אך לא ניתן להרחיב את f לפונקציה רציפה על קבוצה גדולה יותר.

9. נניח שהטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

מתכנס במידה שווה על הישר. הוכיחו שהגבול הוא פונקציה רציפה ומחזורית 2π. מה קורה אם משמיטים את ההנחה שההתכנסות היא במידה שווה?

10. קבעו אילו מבין הפונקציות הבאות גזירות ברציפות בתחום ההתכנסות שלהן, ואילו גזירות פעמיים ברציפות.

(א) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^4}$

(ב) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{x^n}{n^3}$

(ג) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

(ד) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2^n \pi x)}{2^{2n}}$ (רמז: אפשר להיעזר בתרגיל אחר בגיליון, גם אם אותו לא פתרתם).

11. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם f_n היא סדרת פונקציות שאינן אינטגרביליות רימן בקטע $[a,b]$, ואם $f_n \to f$ במידה שווה בקטע $[a,b]$, אז גם f אינה אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$.

(ב) גבול נקודתי של פונקציות עולות חלש הוא פונקציה עולה חלש.

(ג) גבול נקודתי של פונקציות עולות חזק הוא פונקציה עולה חזק.

(ד) אם $f_n \rightrightarrows f$ ואם f_n אינן רציפות אז f אינה רציפה.

(ה) אם $f_n \to f$ ואם f אינה רציפה אז ההתכנסות אינה במידה שווה.

(ו) תהיה f_n סדרה של פונקציות חסומות המתכנסות במידה שווה אזי יש $M < 0$ שחוסם את f_n לכל n.