אינפי 2 - תרגיל 8

שאלות להגשה:

1. נסחו והוכיחו גרסא של משפט ההתכנסות הנשלטת עבור פונקציות (לא בהכרח חסומות) על קטע חסום.

2. חשבו
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\sin x}{1+n^2\sqrt{x}}dx$$

3. (א) מצאו את טורי החזקות של הפונקציות ההיפרבוליות $\sinh, \cosh$ ואת רדיוס ההתכנסות שלהם.
   (ב) מצאו את טור החזקות של $\arcsin$ ואת רדיוס ההכתנסות שלו. הסיקו מהו טור החזקות של $\arccos$.
   רמז: נסו תחילה לחשב את טור החזקות של $\frac{d(\arcsin(x))}{dx}$.

4. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ טור. הוכיחו את נוסחת ד'למבר עבור רדיוס ההתכנסות של הטור:
$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$$
אם וכאשר הגבול קיים.

5. מצא את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:
   (א) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln(n)^p}$, כאשר $p>0$.
   (ב) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{a^n+b^n}$, כאשר $a,b>0$.
   (ג) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}(x+5)^n$.
   (ד) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n^2}$

6. בטאו את הפונקציה
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$
באמצעות פונקציות אלמנטריות. נמקו! עבור אילו ערכי x מתכנס טור חזקות זה? חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n5^n}$.

7. יהיה $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ טור מתכנס בהחלט, תנו דוגמא לשתי פונקציות שונות : f, g $(-1,1) \to \mathbb{R}$ כך ש־

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = a_n$$

8. יהיה $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R < 0$. הוכיחו כי הטור מגדיר פונקציה אנליטית בתחום התכנסותו.

9. בכיתה חישבתם את רדיוס ההתכנסות של בינום ניוטון

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

בדקו את ההתכנסות בקצוות תחום ההתכנסות עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ כלשהו.

10. הוכיחו שאם f פונקציה רציפה במידה שווה על הישר אז קיימת סדרה של פונקציות גזירות אינסוף פעמים ברציפות המתכנסת במידה שווה ל־f חישבו מעט על ההבדל בין משפט זה לבין משפט הקירוב של ויירשטראס.

11. הוכיחו כי לכל $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ גזירה n פעמים ברציפות ולכל $\epsilon > 0$ קיים פולינום $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ כך ש־

$$\forall 0 \leq k \leq n \ \forall x \in [a,b] : \ \left| f^{(k)}(x) - p^{(k)}(x) \right| < \epsilon$$

שאלות לא להגשה:

1. הוכיחו כי אם $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות כך של־f יש תומך סופי אזי $f * g$ אינטגרבילית ומתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} f * g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx$$

2. הוכיחו כי לכל $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,לכל $\epsilon > 0$ ולכל $x_1, ..., x_n \in [a,b]$ קיים פולינום $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ כך ש־

$$\forall x \in [a,b] : \ |f(x) - p(x)| < \epsilon$$

וגם

$$\forall 1 \leq k \leq n: \; f(x_i) = p(x_i)$$

3. בעזרת טור החזקות של $\ln(1+x)$ מצאו טור חזקות לפונקציה $\ln(r+x)$ סביב 0 עבור $r>0$ קבוע ומצאו את רדיוס ההתכנסות שלו.

4. נתונים טורי החזקות $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ בעלי רדיוס התכנסות R_1, R_2 בהתאמה, מה ניתן לאמר על רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) x^n$.

5. בדקו האם הטור טיילור של הפונקציה $f(x) = (1+x)^a$ מתכנס בנקודות 1 ו־-1. (שימו לב: התשובה תלויה בערך של a).

6. הוכיחו שקיימת פונקציה אנליטית יחידה $f(x)$ המוגדרת בסביבת 0 ומקיימת

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) \equiv 0$$

וכן $f(0)=1$ ו־ $f'(0)=2$. מצאו את f.

7. מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n \sqrt{n}}$.

8. מצאו את הטור טיילור ואת רדיוס ההתכנסות שלו עבור הפונקציות הבאות סביב הנקודות הנתונות:

(א) $\sin(x^2)$ סביב $x=0$.

(ב) x^3+2x סביב $x=4$.

(ג) $\sin(x)\cdot\cos(x)$ סביב $x=\pi$.

(ד) e^{x^2-3x+5} סביב $x=9$.

9. מצאו את כל הפונקציות $f \in C([0,1])$ המקיימות שלכל $n=0,1,2,...$ מתקיים

$$\int_0^1 f(x) x^n \, dx = 0$$

10. סדרת פיבונצ'י f_n מוגדרת על־ידי $f_0 = f_1 = 1$ ונוסחת הנסיגה $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. נגדיר $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n x^n$

(א) הראו ש־ $f_n \leq 2^n$, והסיקו מכאן חסם תחתון על רדיוס ההתכנסות של הטור.

(ב) חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}}$ ומצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור.

(ג) התבוננו בביטוי $(1-x-x^2)f(x)$ עבור $|x|<R$, ומצאו את סכום הטור עבור ערכים אלו. הסבירו.

11. בתרגיל זה אתם תוכיחו את נוסחאת סטירלינג בשיטה שונה מזו שראינו בכיתה. מה שיפה בהוכחה זו הוא שהכלים בם נשתמש הם די שונים.

(א) הראו ש

$$\log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \int_1^k \frac{dx}{x} = \int_1^n \frac{n - \lfloor x \rfloor}{x} dx$$

(ב) הסיקו מא' ש

$$n! = n^{n+1/2} e^{-n} \exp\left(1 + \int_1^n \frac{\{x\} - 1/2}{x}\right)$$

כאשר $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$

(ג) הראו שהאינטגרל בסעיף הקודם מתכנס והסיקו שקיים קבוע $C > 0$ כך ש

$$n! \sim C n^{n+1/2} e^{-n}$$

ביתר הסעיפים נחשב את C.

(ד) השתמשו בסעיף הקודם כדי להסיק ש

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{\sqrt{2} 2^{2n}}{C\sqrt{n}}$$

(ה) הוכיחו ש־

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n du = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$$

(ו) תהיה R_n פונקציית השגיאה המתאימה לפולינום טיילור מסדר n של $(1+x)^{2n+1}$. הראו, לפי הגדרת השגיאה, ש

$$R_n(1) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

(ז) מצד שני, הראו ש־

$$R_n(1) = \frac{1}{n!}\int_0^1 (2n+1)(2n)\cdots(n+1)(1+t)^n(1-t)^n dt$$
$$= \sqrt{n}\binom{2n}{n}(1+\frac{1}{2n})\int_0^{\sqrt{n}}(1-\frac{u^2}{n})^n du.$$

(ח) השתמשו בשלושת הסעיפים הקודמים ובסעיף ד' כדי להסיק ש־ $C = \sqrt{2\pi}$.