אינפי 2 - תרגיל 9

כל הקבוצות המופיעות בתרגיל הן תתי קבוצות של המרחב האוקלידי ה־n ממדי.

שאלות להגשה:

1. יהיו U_1, U_2 קבוצות פתוחות, הוכיחו כי גם $U_1 \bigcap U_2$ פתוחה.
2. נגדיר קוטר של קבוצה E להיות $\operatorname{diam}(E) = \sup\{\|x-y\| | x, y \in E\}$. הוכיחו ש־$E$ חסומה אם ורק אם $\operatorname{diam}(E) < \infty$. רמז: זיכרו את אי־שיוויון המשולש, אם לא הולך, נסו תחילה להוכיח עבור $\mathbb{R}$.
3. כזכור, בהינתן קבוצה A, הגדרנו

$$\begin{aligned}
\partial A &= \{x \in \mathbb{R}^n | \forall \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \text{ and } B_\epsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset\} \\
intA &= \{x \in A | \exists \epsilon > 0 : \ B_\epsilon(x) \subseteq A\} \\
\overline{A} &= \{x \in \mathbb{R}^n | \forall \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \cap X \neq \emptyset\}
\end{aligned}$$

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל קבוצה A, מתקיים $\overline{A} = \operatorname{int}(A) \cup \partial A$.

(ב) לכל קבוצה A, מתקיים $\overline{\partial A} = \partial A$.

(ג) לכל קבוצה A, מתקיים $\partial\partial A = \partial A$.

(ד) A סגורה אם ורק אם $A = \overline{A}$.

(ה) $A' = A''$, כאשר A' היא קבוצת נקודות ההצטברות של A.

4. הוכיחו כי לכל $X \subset \mathbb{R}^n$ מתקיים

(א) $intX = \mathbb{R}^n \setminus \overline{(\mathbb{R}^n \setminus X)}$

(ב) $\overline{X} = \bigcap\limits_{\substack{Y \text{closed} \\ Y \supseteq V}} Y$ (כלומר ההגדרה שניתנה בכיתה שקולה לזו שניתנה בתרגול)

(ג) $\partial X = \overline{X} \setminus intX$

5. תהי K קומפקטית ב־ $\mathbb{R}^n$. הוכיחו ש־ $K \times K$ קומפקטית ב־ $\mathbb{R}^{2n}$.
6. תהי F קבוצה סגורה ו־K קבוצה קומפקטית. נגדיר

$$F + K = \{f + k | f \in F, k \in K\}$$

הוכיחו ש־$F+K$ סגורה. האם ניתן לוותר על ההנחה שאחת הקבוצות קומפקטית?

7. הוכיחו כי קבוצה קשירה ב־$\mathbb{R}$ היא בהכרח קטע (להזכירכם הוכחנו בכיתה את הכיוון השני). הוכיחו גם כי קטע ב־$\mathbb{R}$ הוא קשיר מסילתית (ולכן ברגע שנוכיח בתרגול הבא שקבוצות קשירות הן קשירות מסילתית נקבל שב־$\mathbb{R}$ שלושת המושגים הם שקולים).

8. (א) הוכיחו את למת הפרח: יהיה $\{X_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות קשירות כך ש־$\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$ אזי $\bigcup_{i\in I} X_i$ גם כן קשירה. נסו לחשוב מעין המשפט קיבל את שמו...

(ב) (לא להגשה) הוכיחו את ההכללה הבאה של למת הפרח: יהיה $\{X_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות קשירות כך שלכל $i \neq j$ מתקיים $X_i \bigcap X_j \neq \emptyset$ אזי $\bigcup_{i\in I} X_i$ גם כן קשירה.

(ג) הוכח או הפרך: חיתוך של קבוצות קשירות הוא קשיר.