אינפי 2 - תרגיל 10

שאלות להגשה:

1. הוכיחו כי הרכבה של פונקציה רציפה $f : A \to \mathbb{R}$ עם פונקציה רציפה $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא גם כן פונקציה רציפה.

2. הגדירו מהי סדרת קושי ב־$\mathbb{R}^n$ והוכיחו שעבור סדרה $\left(x^{(m)}\right) \subseteq \mathbb{R}^n$ מתקיים: $\left(x^{(m)}\right)$ מתכנסת אם ורק אם $\left(x^{(m)}\right)$ סדרת קושי.

3. (א) תהי A קבוצה סגורה. תהי $x \in \mathbb{R}^n$, ונניח כי $x \notin A$. הוכיחו כי $\inf \{d(x,y) | y \in A\} > 0$.

   (ב) תהיינה L,K שתי קבוצות קומפקטיות וזרות. הוכיחו שקים $r > 0$ כך שלכל $x \in K$, $y \in L$ מתקיים $\|x-y\| > r$.

4. נסחו והוכיחו הכללה למשפט הסנדוויץ' עבור פונקציות $f : U \to \mathbb{R}$.

5. בשאלה הקרובה נחקור הטלות על ישרים.

   (א) עבור ישר ב־$\mathbb{R}^n$ הנתון על ידי המשווה $y = \alpha x$ (עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ קבוע) רשמו את אופרטור ההטלה על הישר.

   (ב) הוכיחו כי הטלה על על ישר היא פונקציה רציפה.

   (ג) הוכיחו כי תמונת ההטלה של קבוצה קומפקטית היא סגורה.

   (ד) מצאו דוגמא לקבוצה סגורה שהטלתה לא סגורה.

6. הוכיחו שאם קבוצה U פתוחה היא קשירה אזי היא קשירה מסילתית.

   הדרכה: קחו נקודה $p \in U$, והתבוננו בקבוצה U_p הכוללת את כל הנקודות q עבורן קיימת מסילה ב־U המתחילה ב־p ונגמרת ב־q, קבוצה זאת נקראת רכיב הקשירות של p ב־U. הוכיחו ש־U_p היא פתוחה (זה סטנדרטי) וסגורה (היזהרו!).

7. הוכיח כי קבוצה קשירה מסילתית $A \subseteq \mathbb{R}$ היא קשירה. כלומר כל קבוצה ב־$\mathbb{R}$ היא קשירה אם ורק אם היא קשירה מסילתית. הוכיחו במקרה זה A היא בהכרח קטע. בכך תוכיחו את הטענה: A קשירה אם ורק אם היא קשירה מסילתית אם ורק אם היא קטע.

8. בתרגיל זה ניתן הוכחה חלופית לכך שפונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית, רציפה שם במידה שווה.

   (א) תהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית. נניח שיש ל־K כיסוי על ידי n כדורים פתוחים בעלי רדיוסים $r_1, r_2, \ldots, r_n$. הראו שקיימים $0 < t_i < r_i$ לכל $1 \le i \le n$, כך שניתן לכסות את K באמצעות n כדורים סגורים בעלי רדיוסים $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ב) תהי $f : E \to \mathbb{R}^m$ רציפה. הוכיחו ש- $F : E \times E \to \mathbb{R}^m$ המוגדרת לפי

$$F(x,y) = f(x) - f(y)$$

גם היא רציפה.

(ג) השתמשו בסעיפים הקודמים ובעובדה (מתרגיל הבית הקודם) שאם $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית אז כך גם $K \times K \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ בכדי להוכיח שפונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית, רציפה שם במידה שווה.

שאלות לא להגשה:

1. הוכיחו: אם $x \in E'$ (כלומר x נקודת הצטברות של E) אזי יש סדרה $E \supset (x_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$x_n \to x$. הראו שאפשר לארגן שיתקיים גם $x_m \neq x_n$ לכל $m \neq n$.

2. הוכיחו: אם E סגורה, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-E ומתקיים $x_n \to x$, אזי $x \in E$.

3. (א) הגדירו את המושגים התכנסות נקודתית והתכנסות במידה שווה עבור סדרת פונקציות $\left(f_n : E \to \mathbb{R}^d\right)_{n=1}^{\infty}$.

(ב) הוכיחו את משפט דיני: "תהי $f_n : K \to \mathbb{R}$ סדרה מונוטונית (כלומר $f_n \geq f_{n+1}$ לכל n או $f_n \leq f_{n+1}$ לכל n) של פונקציות רציפות על קבוצה קומפקטית $K \subseteq \mathbb{R}^d$ המתכנסת באופן נקודתי לפונקציה רציפה f. אזי הסדרה f_n מתכנסת במידה שווה ל-f."

רמז: בהינתן $\epsilon > 0$, לכל $x \in K$, יש $n_x \in \mathbb{N}$ כך ש-

$$\left|f_{n_x}(x) - f(x)\right| < \epsilon$$

כעת יש להתבונן על אוסף הנקודות

$$U_x = \left\{y \in K \mid \left|f_{n_x}(y) - f(y)\right| < \epsilon\right\}$$

המשיכו מכאן.

(ג) (רשות) תהי $F : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. תהי y_n סדרת נקודות ב- $[c,d]$ המתכנסת ל-y_0. לכל n נגדיר $f_n(x) = F(x, y_n)$. הוכיחו (בשלוש שורות) שהסדרה f_n מתכנסת במידה שווה ל-f_0.

4. הוכיחו את משפט היינה: תהיה $f : A \to \mathbb{R}$ עבור $A \to \mathbb{R}^n$ ויהיה $p \in A$. אזי f רציפה ב-p אם ורק אם לכל סדרה $x^{(m)} \in A$ כך ש-$x^{(m)} \to p$ מתקיים $f\left(x^{(m)}\right) \to f(p)$.

5. תהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית. הראו שהפונקציה

$$f(x) = d(x, K) := \inf\{d(x,y) | y \in K\}$$

היא פונקציה רציפה. האם הדרישה ש־K קומפקטית הכרחית?

6. הוכיחו כי פונקציית המטריקה $d : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $d(x,y) = \|x-y\|$ היא פונקציה רציפה.

7. הוכיחו שאם $f_n : E \to \mathbb{R}^m$ סדרת פונקציות רציפות על E המתכנסות במידה שווה ל־f, אזי גם f רציפה על E.

8. פונקציה $f : X \to \mathbb{R}$ נקראת פתוחה אם לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ גם $f(X \cap U)$ פתוחה גם כן.

(א) הוכיחו כי $f(x) = |x|$ פונקציה רציפה ולא פתוחה.

(ב) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: פונקצייה פתוחה $f : A \to \mathbb{R}^m$ עבור $A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא בהכרח גם רציפה.