אינפי 2 - תרגיל 11

כל הקבוצות המופיעות בתרגיל הן תתי קבוצות של המרחב האוקלידי ה־n ממדי.

1. תהי U קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית. נניח ש־f פונקציה דיפרנציאבילית ב־U, ונניח שכל הנגזרות החלקיות של f מתאפסות ב־U. הוכיחו ש־f קבועה ב־U.

   הדרכה: השתמשו בכלל השרשרת ביחד עם אחד התרגילים בגיליון זה.

2. נתבונן בפונקציה

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0)\\ \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

   (א) הוכיחו ש־f רציפה ב־$(0,0)$.

   (ב) חשבו את הנגזרות החלקיות של f: $\frac{\partial f}{\partial x}$ ו־ $\frac{\partial f}{\partial y}$. הראו שהן רציפות.

   (ג) האם f דיפרנציאבילית?

   (ד) חשבו את הנגזרות החלקיות המעורבות מסדר שני בנק' $(0,0)$. הראו ש־

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(0,0\right)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(0,0\right)$$

3. תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית. הוכיחו שלכל שתי נקודות $p,q\in U$ קיימת מסילה חלקה γ המחברת בין p ו־q. כלומר, הראו שיש $\gamma:[a,b]\to U$ המקיימת $\gamma(a)=p$, $\gamma(b)=q$ ושעבורה γ_i גזירה אינסוף פעמים לכל i (השתמשנו כאן בסימון הרגיל : $\left(\gamma\left(t\right)=\left(\gamma_1\left(t\right),...,\gamma_n\left(t\right)\right)\right)$.

   הראו על־ידי דוגמא שהכרחי להניח ש־U פתוחה. איפה בהוכחה שלכם השתמשתם בכך?

4. חשבו את הגבולות הבאים:

   (א) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^4+y^2}{x^4+y^2}$

   (ב) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x}$

   (ג) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)}f\left(x,y\right)$, כאשר

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^5}{x^3+y^3}, & x\neq-y\\ 0, & x=-y\end{cases}$$

ד) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+3x^2+y^2}-1}{6x^2+2y^2}$

5. בדקו האם הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות בנקודה $(0,0)$:

א) $$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0)\\ \frac{y\sin^2 x}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

ב) $$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0)\\ \frac{x^3+y^3}{2x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

ג) $$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0)\\ \frac{\left(x^2+y^2\right)^a}{\ln(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

6. הוכיחו את כלל לייבניץ המוכלל - תהיה $f(x,\theta)$ פונקציה גזירה ברציפות במשתנה θ ויהיו $a(\theta), b(\theta)$ פונקציות גזירות, אזי

$$\frac{d}{d\theta}\left(\int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(x,\theta)\,dx\right)=\int_{a(\theta)}^{b(\theta)}\frac{\partial f}{\partial\theta}(x,\theta)\,dx+f(b(\theta),\theta)\,b'(\theta)-f(a(\theta),\theta)\,a'(\theta)$$

7. חשבו נגזרות חלקיות עבור הפונקציות הבאות:

$$\arctan\left(\frac{x}{y}\right),\ \sqrt{x^2+y^2},\ \left(x+y^2\right)\log(x)$$

שימו לב: מה תחום ההגדרה של הפונקציות ומתי הן גזירות?

8. תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, ונניח כי f רציפה ב $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$. נניח כי לכל $k\in\mathbb{R}$ מתקיים ש־$\lim_{x\to\infty} f(x,kx)=0$. נניח כי קיים $L>0$ וכי קיימת פונקציה רציפה $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש־$\phi(0)=0$, כך ש־$\phi(x)\neq 0$ לכל $x\neq 0$, וכך ש־$\lim_{x\to\infty} f(x,\phi(x))=L$. הוכיחו כי לכל $0<M<L$ קיימת סדרה $(a_n)\subseteq\mathbb{R}^2$ כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n=(0,0)$ וכך שלכל n מתקיים $f(a_n)=M$.

רמז: היעזרו במשפט ערך הביניים מאינפי 1.

9. מצאו את פולינום טיילור מסדר 3 של הפונקציות הבאות סביב $(0,0)$.

א) $f(x,y)=e^x\cdot y^3$

ב) $f(x,y)=\frac{1}{xy+1}$

ג) $f(x,y)=\int\limits_0^{x+y} e^{t^2}\,dt$

למתקדמים: מצאו את טור טיילור (לא למדנו מהו טור טיילור בשני משתנים, אבל אתם מוזמנים לנחש).

10. תהי $f(x,y)=\ln\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)$ כאשר $a,b\in\mathbb{R}$ כלשהם. הוכיחו כי f היא פיתרון למשוואה הדיפרנציאלית החלקית

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\equiv 0$$

הערה: משוואה דיפרנציאלית זו נקראת משוואת לפלס. פונקציה המקיימת את משוואת לפלס נקראת פונקציה הרמונית, פונקציות אלו הן בעלות חשיבות רבה במגוון תחומים.

11. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את כל נקודות הקיצון המקומי שלה ומיינו אותן. בנוסף, מצאו את המינימום והמקסימום המוחלט של f בתחום D.

א) $f(x,y)=|x-y|+x^2;\qquad D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 2\right\}$.

ב) $f(x,y)=4x^2+9y^2-\left(2x^2+3y^2\right)^2;\qquad D=\left\{(x,y)\middle|2x^2+3y^2\le 1\right\}$.

ג) $f(x,y)=x^4-x^2+2xy+y^2;\qquad D=\{(x,y)|x+y\le 2,\ 0\le x,\ 0\le y\}$.

12. יהי D תחום (כלומר קבוצה פתוחה וקשירה) חסום ב־$\mathbb{R}^2$. לכל $u\in C^2(U)$ נגדיר את הלפלסיאן של u להיות

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u_{xx}+u_{yy}$$

(א) הוכיחו שאם $\Delta u\equiv 1$ ב־U אזי ל־u אין מקסימום מקומי ב־U.

(ב) נניח ש־$u\in C\left(\overline{U}\right)\cap C^2(U)$ ושמתקיים $\Delta u\equiv 1$. הוכיחו שהמקסימום של u מתקבל על השפה של U, כלומר:

$$\sup\{|u(x,y)||(x,y)\in U\}=\max\{|u(x,y)||(x,y)\in\partial U\}$$

שימו לב שיש צורך להצדיק למה באגף ימין מופיע מקסימום.

(ג) לכל $\epsilon>0$, מצאו פונקציה $u(x,y)$ המקיימת $\Delta u=\epsilon$.

(ד) הוכיחו שאם $u\in C\left(\overline{U}\right)\cap C^2(U)$ מקיימת את משוואת לפלס $\Delta u\equiv 0$ ב־U אזי המקסימום של u מתקבל על השפה של U.

13. חשבו את אורכי העקומות הבאות:

(א) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$

(ב) $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$

(ג) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$, תנו הסבר גיאומטרי לתוצאה שקיבלתם.

(ד) γ היא העקומה במישור בין $(1,-1)$ לבין $(1,1)$ לאורך העקומה $y^2 = x^3$.