משפט: תהי $f\in C^1[a,b]$. אזי העקום

$$\gamma=\{(x,f(x)) \mid x\in[a,b]\}$$

הוא בעל אורך, ואורכו נתון ע"י

$$length(\gamma)=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

הוכחה: נסמן $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

לפי הגדרה של אורך של עקום, מה שעלינו להוכיח הוא:

מה שצ"ל: לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P של הקטע $[a,b]$, אם $\Delta(P)<\delta$ אז $|l(f,P)-l|<\varepsilon$.

יהי $\varepsilon>0$ נתון. נתבונן בפונקציה $g(x)=\sqrt{1+(f'(x))^2}$.

כיוון ש- $f\in C^1[a,b]$, נובע ש- $g\in C[a,b]$.
לכן g אינטגרבילית.
מהאינטגרביליות של g, נובע שקיים $\delta>0$ (δ זה תלוי ב-ε הנתון מלמעלה) עבורו

(*) $$\left|I(g,P,Y)-\int_a^b g(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

לכל P המקיימת $\Delta(P)<\delta$ ולכל סדרת הצבה מתאימה Y.
נראה כעת שאותו δ (הנתון מאינטגרביליות של g) עובד כדי להוכיח מה שצ"ל.

כלומר, נכונו שאם ניקח את δ זה, יתקיים שלכל חלוקה P המקיימת $\Delta(P)<\delta$
$|\ell(f,P)-\ell| < \varepsilon$.

אכן, תהי $P=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$ חלוקה של $[a,b]$, המקיימת $\Delta(P)<\delta$.
ממשפט לגרנז' נובע שבכל קטע $[x_{j-1},x_j]$ קיים $z_j\in[x_{j-1},x_j]$ כך ש-

$$\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j-x_{j-1}} = f'(z_j)$$

כעת נחשב

$$\ell(f,P)=\sum_{j=1}^{n}\sqrt{(x_j-x_{j-1})^2+(f(x_j)-f(x_{j-1}))^2}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j-x_{j-1}}\right)^2}\,(x_j-x_{j-1})$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sqrt{1+f'(z_j)^2}\,(x_j-x_{j-1})$$

$$=\sum_{j=1}^{n} g(z_j)\Delta_j = I(g,P,z)$$

כאשר $I(g,P,z)$ מסמן את סכום רימן של g עם חלוקה P ועם סדרת הבחירה $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$.

לכן $|\ell(f,P)-\ell| = |I(f,P,z)-\ell|$

②

כיון ש- $\Delta(P)<\delta$,
ולפי איך שבחרנו את δ, מתקיים

$$|I(g,P,Y)-l|<\varepsilon$$

(כאן משוואה ⊛ בעמ' 1.)

לכל סדרת הצבה Y, ובפרט מתקיים

$$|l(f,P)-l|=|I(g,P,Z)-l|<\varepsilon$$

זה מה שצריך להוכיח.