# SUR UN PROBLEME D'UNICITE POUR LES FONCTIONS MEROMORPHES

Fedor Pakovitch

**Résumé** - Dans [1] C.C. Yang a posé le problème suivant : soient $P(z)$ et $Q(z)$ des polynômes complexes de même degré. Est-il vrai que $P^{-1}\{0,1\} = Q^{-1}\{0,1\}$ implique que, soit $P = Q$, soit $P + Q = 1$? Dans cette note, on montre que la réponse à cette question est affirmative et on donne quelques généralisations pour les fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte.

## On the uniqueness problem for meromorphic functions

**Abstract** - In [1] C.C. Yang have raised the following problem: Let $P(z)$ and $Q(z)$ be two complex polynomials of the same degree such that $P^{-1}\{0,1\} = Q^{-1}\{0,1\}$. Does it follow that either $P = Q$ or $P + Q = 1$? In this note we show that the answer to this question is affirmative and give some generalizations for meromorphic functions on compact Riemann surface.

## 1. Introduction et résultats.

- Dans [1] C.C. Yang a posé le problème d'unicité suivant : *soient $P(z)$ et $Q(z)$ des polynômes complexes de même degré. Est-il vrai que $P^{-1}\{0,1\} = Q^{-1}\{0,1\}$ implique que, soit $P = Q$, soit $P + Q = 1$?* Ce problème est discuté dans le cadre de la théorie des fonctions méromorphes et résolu dans quelques cas particuliers dans [2]-[4]. Dans cette note, on montre que la réponse à la question de C.C. Yang est affirmative et on donne quelques généralisations pour les fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte. Rappelons que, pour un ensemble fini $K \subset \mathbb{C}$, le centre du disque de rayon minimal qui contient $K$ est dit *centre de Chebyshev* de $K$. Le rayon de ce disque est dit *rayon de Chebyshev* de $K$. Le résultat principal de cette note, qui implique en particulier une réponse affirmative à la question de C.C. Yang, est:

Théorème 1. *Soient $R$ une surface de Riemann compacte de genre $g = g(R)$ et $\varphi, \psi$ des fonctions méromorphes sur $R$ telles que pour un ensemble fini non vide de points $K \subset \mathbb{C}$ on ait l'égalité $\varphi^{-1}\{K\} = \psi^{-1}\{K\}$. Supposons que*

*i)* $\operatorname{div}_\infty \varphi = \operatorname{div}_\infty \psi = D$

*ii) il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que pour tout point $p \in \operatorname{supp} D$, $\operatorname{ord}_p(\varphi - \lambda\psi) > \operatorname{ord}_p \varphi = \operatorname{ord}_p \psi$.*

*Alors il existe une rotation du plan complexe $\sigma$ dont le centre coïncide avec le centre de Chebyshev de l'ensemble $K$, telle que*

1) $\sigma K = K$

2) $\varphi^{-1}\{x\} = (\sigma \circ \psi)^{-1}\{x\}$ *pour chaque $x \in K$.*

*Si, de plus, $\sharp\{K\} \geq 2 + (2g-1)/\deg D$ (par exemple, si $\sharp\{K\} \geq 2 + g$), alors $\varphi \equiv \sigma \circ \psi$.*

En outre, on montre que chaque polynôme complexe $P(z)$ possède une propriété extrémale par rapport à la préimage géométrique $L$ de points $\alpha, \beta$ de $\mathbb{C}$, qui permet de retrouver (à symétrie près) $P(z)$ dés que l'on connait $L, \alpha, \beta$ et $\deg P(z)$. Pour cela rappelons, que le polynôme complexe unitaire $P(z)$ de degré $n$ est dit *s'écartant le moins possible de zéro sur le compact $L \subset \mathbb{C}$ parmi tous les polynômes complexes unitaires de degré $n$*, si $||P||_L \leq ||Q||_L$ pour chaque polynôme complexe unitaire $Q(z)$ de degré $n$, où $||P||_L := \max_{z \in L}\{|P(z)|\}$. Il est bien connu (voir, par exemple [5],[6]), qu'un tel polynôme est unique, pourvu que le compact $L$ contienne au moins $n$ points. Le deuxième résultat de cette note est le suivant:

Théorème 2. *Soient $P(z)$ un polynôme complexe unitaire de degré $n$ et $\alpha$ un nombre complexe non nul. Alors le polynôme $P(z)$ est l'unique polynôme de degré $n$ qui s'écarte le moins possible de zéro sur le compact $L = P^{-1}\{-\alpha, \alpha\}$.*

## 2. Démonstrations.

Pour un diviseur $D = \sum_{p\in R} o_p \cdot p$ sur $R$ et une fonction $\theta$ telle que $\operatorname{supp} \operatorname{div}_\infty \theta \cap \operatorname{supp} D = \emptyset$, désignons par $\sum_D \theta$ la somme $\sum_{p\in R} o_p \theta(p)$.

**Lemme.** *Soient $R$ une surface de Riemann compacte et $\varphi, \psi$ des fonctions méromorphes sur $R$ telles que $\operatorname{div}_\infty \varphi \leq \operatorname{div}_\infty \psi$. Alors pour chaque $\eta \in \mathbb{C}$ on a l'égalité:*

$$\sum_{\operatorname{div}_0(\psi-\eta)} \varphi = \eta \sum_{\operatorname{div}_\infty \psi} (\varphi/\psi) + \sum_{\operatorname{div}_0 \psi} \varphi. \tag{1}$$

Démonstration du lemme. Considérons la forme différentielle $\omega = \frac{\varphi(z)\,\mathrm{d}\,\psi(z)}{\psi(z)-\eta} - \frac{\varphi(z)\,\mathrm{d}\,\psi(z)}{\psi(z)}$ et appliquons le théorème des résidus. On a:

$$\sum_{p\in R} \operatorname{res}_p \omega = \sum_{\psi(p)=\eta} \operatorname{res}_p \omega - \sum_{\psi(p)=0} \operatorname{res}_p \omega + \sum_{\psi(p)=\infty} \operatorname{res}_p \omega = 0.$$

Il est clair que $\sum_{\psi(p)=\eta} \operatorname{res}_p \omega = \sum_{\operatorname{div}_0(\psi-\eta)} \varphi$, $\sum_{\psi(p)=0} \operatorname{res}_p \omega = \sum_{\operatorname{div}_0 \psi} \varphi$, et, en utilisant les coordonnées locales aux points de $\operatorname{supp} \operatorname{div}_\infty \psi$, il est facile de vérifier que l'inégalité $\operatorname{div}_\infty \varphi \leq \operatorname{div}_\infty \psi$ implique que

$$\sum_{\psi(p)=\infty} \operatorname{res}_p \omega = \eta \sum_{\psi(p)=\infty} \operatorname{res}_p \frac{\varphi}{\psi} \frac{\mathrm{d}\,\psi}{(\psi-\eta)} = -\eta \sum_{div_\infty \psi} (\varphi/\psi).$$

Démonstration du théorème 1. Il est clair qu'il suffit de démontrer le théorème en supposant que le centre de Chebyshev de l'ensemble $K$ se trouve en zéro. Grâce au lemme précédent, les conditions du théorème impliquent le système suivant:

$$\sum_{\operatorname{div}_0(\psi-\eta)} \varphi = n\eta\lambda + \sum_{\operatorname{div}_0 \psi} \varphi, \quad \sum_{\operatorname{div}_0(\varphi-\eta)} \psi = n(\eta/\lambda) + \sum_{\operatorname{div}_0 \varphi} \psi, \tag{2}$$

où $n$ est le degré des fonctions $\varphi$ et $\psi$. Le système ci-dessus implique qu'il existe un nombre complexe $\eta_1$, tel que

$$\bar\lambda \sum_{\operatorname{div}_0(\psi-\eta_1)} \varphi + (1/\bar\lambda) \sum_{\operatorname{div}_0(\varphi-\eta_1)} \psi = 0. \tag{3}$$

En substituant dans (2) $\eta = \eta_1$ et en soustrayant le système obtenu au système (2) on obtient:

$$\sum_{\operatorname{div}_0(\psi-\eta)} \varphi = n(\eta-\eta_1)\lambda + \sum_{\operatorname{div}_0(\psi-\eta_1)} \varphi, \quad \sum_{\operatorname{div}_0(\varphi-\eta)} \psi = n(\eta-\eta_1)/\lambda + \sum_{\operatorname{div}_0(\varphi-\eta_1)} \psi,$$

il s'ensuit que

$$|\sum_{\operatorname{div}_0(\psi-\eta)} \varphi|^2 = n^2|\lambda|^2|\eta-\eta_1|^2 + |\sum_{\operatorname{div}_0(\psi-\eta_1)} \varphi|^2 + 2n\operatorname{Re}\{(\bar\eta-\bar\eta_1)\bar\lambda \sum_{\operatorname{div}_0(\psi-\eta_1)} \varphi\},$$

$$|\sum_{\mathrm{div}_0(\varphi-\eta)}\psi|^2 = n^2\frac{1}{|\lambda|^2}|\eta-\eta_1|^2 + |\sum_{\mathrm{div}_0(\varphi-\eta_1)}\psi|^2 + 2n\,\mathrm{Re}\{(\bar\eta-\bar\eta_1)\frac{1}{\bar\lambda}\sum_{\mathrm{div}_0(\varphi-\eta_1)}\psi\}.$$

En ajoutant les égalités ci-dessus, en tenant compte de la formule (3), on obtient:

$$|\sum_{\mathrm{div}_0(\psi-\eta)}\varphi|^2+|\sum_{\mathrm{div}_0(\varphi-\eta)}\psi|^2 = n^2|\eta-\eta_1|^2\left(|\lambda|^2+\frac{1}{|\lambda|^2}\right)+|\sum_{\mathrm{div}_0(\psi-\eta_1)}\varphi|^2+|\sum_{\mathrm{div}_0(\varphi-\eta_1)}\psi|^2.$$

Désignons par $r$ le rayon de Chebyshev de $K$. Puisque pour $\eta\in K$ arbitraire on a:

$$|\sum_{\mathrm{div}_0(\varphi-\eta)}\psi|\le nr,\quad |\sum_{\mathrm{div}_0(\psi-\eta)}\varphi|\le nr,$$

on conclut que pour chaque $\eta\in K$

$$2n^2r^2 \ge n^2|\eta-\eta_1|^2\left(|\lambda|^2+\frac{1}{|\lambda|^2}\right)+|\sum_{\mathrm{div}_0(\psi-\eta_1)}\varphi|^2+|\sum_{\mathrm{div}_0(\varphi-\eta_1)}\psi|^2. \tag{4}$$

Or, $|\lambda|^2+1/|\lambda|^2\ge 2$ et l'égalité est possible si et seulement si $|\lambda|=1$. De plus, on a $\max_{\eta\in K}|\eta-\eta_1|^2\ge r^2$ avec égalité si et seulement si $\eta_1=0$. Donc l'inégalite (4) implique que $\eta_1=0$, $\sum_{\mathrm{div}_0\psi}\varphi=0$, $\sum_{\mathrm{div}_0\varphi}\psi=0$, et grâce à (2) on obtient le système:

$$\sum_{\mathrm{div}_0(\psi-\eta)}\varphi = n\lambda\eta,\qquad \sum_{\mathrm{div}_0(\varphi-\eta)}\psi = n(\eta/\lambda),$$

avec $|\lambda|=1$. Soit $K=\bigcup_{i=1}^m K_i$, où $K_i:=\{z\in K,|z|=d_i\}$ et $d_1<d_2<\ldots<d_m=r$. En substituant dans la première équation du système ci-dessus $\eta=x_0$, pour $x_0\in K_m$ arbitraire, et en utilisant l'inégalité triangulaire, on conclut que $\psi^{-1}\{x_0\}\subset\varphi^{-1}\{\lambda x_0\}$, il s'ensuit en particulier que $\lambda x_0\in K_m$. De manière analogue, en substituant dans la deuxième équation $\eta=\lambda x_0$ (en tenant compte que $\lambda x_0\in K_m$), on conclut que $\varphi^{-1}\{\lambda x_0\}\subset\psi^{-1}\{x_0\}$. Donc $\varphi^{-1}\{\lambda x_0\}=\psi^{-1}\{x_0\}$. Puisque les mêmes raisonnements sont valables pour chaque $x\in K_m$, on conclut que $\lambda K_m=K_m$ et que $\varphi^{-1}\{x\}=(\lambda\psi)^{-1}\{x\}$ pour chaque $x\in K_m$. Maintenant, comme $\varphi^{-1}\{K_m\}=\psi^{-1}\{K_m\}$, on a $\varphi^{-1}\{\bigcup_{i=1}^{m-1}K_i\}=\psi^{-1}\{\bigcup_{i=1}^{m-1}K_i\}$, et nous pouvons conclure de la même façon que $\varphi^{-1}\{x\}=(\lambda\psi)^{-1}\{x\}$ pour chaque $x\in K_{m-1}$ avec $\lambda K_{m-1}=K_{m-1}$ et ainsi de suite. Donc $\varphi^{-1}\{x\}=(\lambda\psi)^{-1}\{x\}$ pour chaque $x\in K$ et $\lambda K=K$.

Pour finir la démonstration du théorème, estimons le cardinal de l'ensemble $\varphi^{-1}\{K\}$. Pour cela notons que si $x\in K$ et $\mathrm{div}_0(\varphi-x)=\sum_{p\in R}o_p(x)\cdot p$, alors chaque point $p$ ayant $o_p(x)\ge 1$ a pour multiplicité $o_p(x)-1$ dans $\mathrm{div}_0(d\varphi)$, ce qui implique que

$$\sum_{x\in K}\sum_{p\in\varphi^{-1}\{x\}}(o_p(x)-1)\le \deg\mathrm{div}_0(d\varphi).$$

D'autre part

$$\sum_{x\in K}\sum_{p\in\varphi^{-1}\{x\}}(o_p(x)-1)=\sum_{x\in K}\deg\mathrm{div}_0(\varphi-x)-\sum_{x\in K}\sharp\{\varphi^{-1}\{x\}\}=\sharp\{K\}n-\sharp\{\varphi^{-1}\{K\}\}.$$

Donc

$$\sharp\{\varphi^{-1}\{K\}\} \geq \sharp\{K\}n - \deg \mathrm{div}_0(d\varphi). \tag{5}$$

Puisque $\mathrm{div}(d\varphi)$ est dans la classe canonique, $\deg \mathrm{div}(d\varphi) = 2g-2$, donc

$$\deg \mathrm{div}_0(d\varphi) = \deg \mathrm{div}_\infty(d\varphi) + 2g - 2 = n + k + 2g - 2, \tag{6}$$

où $k = \sharp\{\mathrm{supp}\, \mathrm{div}_\infty \varphi\}$. Maintenant (5) et (6) avec la condition $\sharp\{K\} \geq 2 + (2g-1)/n$ impliquent que $\sharp\{\varphi^{-1}\{K\}\} \geq n - k + 1$, il en découle l'égalité $\varphi \equiv \lambda\psi$, puisque l'ordre de la fonction $\varphi - \lambda\psi$ est au plus $n - k$. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

Démonstration du théorème 2. Soit $\tilde{P}(z) = z^n + \tilde{p}_{n-1}z^{n-1} + ... + \tilde{p}_0$ un polynôme complexe unitaire de degré n. En utilisant le lemme, on conclut que

$$\sum_{\mathrm{div}_0(P+\alpha)} \tilde{P} - \sum_{\mathrm{div}_0(P-\alpha)} \tilde{P} = 2n\alpha.$$

Donc $2n|\alpha| \leq 2n \max_{z\in L} |\tilde{P}(z)|$, et $||\tilde{P}||_L \geq ||P||_L = |\alpha|$. Puisque $\sharp\{L\} \geq n+1$, l'unicité est conséquence du théorème cité dans l'introduction.

**Remarques.** 1) Le théorème 1 ne s'étend pas aux fonctions $\varphi, \psi$ dont les diviseurs des pôles coïncident, comme on le voit avec l'exemple des fonctions $\varphi = (z^2 - z - 1)/(z^2 + z + 1)$ et $\psi = -(z^2 + 3z + 1)/(z^2 + z + 1)$, pour lesquelles $\varphi^{-1}\{1\} = \{\infty, -1\}$, $\varphi^{-1}\{-1\} = \{0\}$, $\psi^{-1}\{1\} = \{-1\}, \psi^{-1}\{-1\} = \{\infty, 0\}$, et, donc $\varphi^{-1}\{-1, 1\} = \psi^{-1}\{-1, 1\}$, pourtant $\varphi^{-1}\{1\}$ n'est pas égal à $\psi^{-1}\{1\}$ ou $\psi^{-1}\{-1\}$. 2) Le théorème 2 implique non seulement, comme le théorème 1, une réponse affirmative à la question de C.C. Yang, mais aussi, quelques résultats de théorie d'approximation. Par exemple, le résultat classique suivant est une conséquence du théorème 2: *le polynôme de Chebyshev* $T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\,(n \arccos z)$ *est celui qui s'écarte le moins possible de zéro sur le segment* $[-1, 1]$. En effet, comme il est facile de vérifier, $\max_{y\in[-1,1]} |T_n(y)| \leq 1/2^{n-1}$ et $T_n^{-1}\{-1/2^{n-1}, 1/2^{n-1}\} \subset [-1, 1]$.

L'auteur a le plaisir de remercier M. G. Zaidenberg et I. V. Ostrovskii pour de nombreuses discussions.

## Références bibliographiques

[1] C. C. Yang, *Open problems*, In: Complex analysis, Proc. of the SUNY Brockport Conf., Dekker, New York and Basel, 1978, p. 169.

[2] M.G. Zaidenberg, V.Ya. Lin, *Finiteness theorems for holomorphic mappings*, In: Encyclopadia of Math. Sci. Vol. 9. Several Complex Variables 3. Berlin Heidelberg New York e.a.: Springer Verlag, 1989, p. 113-172.

[3] T. T. Moh, *On certain group structure for polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc., 82, no 2, 1981, p. 183-187.

[4] H. Dobbertin und G. Schmieder, *Zur Charakterisierung von Polynomen durch ihre Null- und Einsstellen*, Arch. Math., 48, 1987, p. 337-342.

[5] J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational function in the complex domain*, Providence, AMS, 1960.

[6] A. N. Kolmogorov, *A remark on the Chebyshev polynomials deviating least from a given function*, Uspechi Matem. Nauk, 3, 1948, no 1, p. 216-221.