

תורת הגרפים (201.1.6081) - מבחן

מועד ב- סמסטר ב תש"ע 28.7.2010

מרצה: ד"ר ש. סמורודינסקי.

משך הבחינה: 3 שעות

אין להשתמש בשום חומר עזר או מחשבון.

שימו לב:

יש לענות על בדיוק 4 מתוך 5 השאלות.

כל שאלה (מתוך ה 4 שאלות שבחרתם) שלא תענה כלל תזכה אותך ב 5 נק (בתנאי שבדף המתאים כתוב "איני יודעת").
יש לסמן כאן: השאלות שבחרתי הן _____

שאלה 1

(25 נק) תהי $\pi: [n] \rightarrow [n]$ תמורה כלשהי. הוכיחו כי קיימת פונקציה $f: [n] \rightarrow \{-1, 1\}$ כך שלכל $i < j$
 $i, j \in [n]$ מתקיים $\left| \sum_{k=i}^j f(k) \right| \leq 2$ וגם $\left| \sum_{k=i}^j f(\pi(k)) \right| \leq 2$ רמז: חשבו על התמורה כעל n נקודות במישור ועל הפונקציה כעל צביעה בכחול ואדום.

שאלה 2

(25 נק) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט עם $n \geq 4$ קודקודים ו $|E| \geq 2n-3$:
הוכיחו כי ב- G קיימים 2 מעגלים שונים בעלי אותו אורך.

שאלה 3

(25 נק) יהי G גרף כך שלכל שני מעגליים אי-זוגיים קיים קודקוד משותף. הוכיחו כי $\chi(G) \leq 5$

שאלה 4

יהי $G_1=(V,E)$ גרף פשוט שמכיל לכל היותר מעגל אי-זוגי אחד. יהי $G_2=(V,E')$ עץ. יהי $G=(V,E \cup E')$
א. (15 נק) הוכיחו כי $\chi(G) \leq 6$.
ב. (10 נק) הוכיחו כי $\chi(G) \leq 5$.

שאלה 5

(25 נק) יהי $G=(V,E)$ גרף. הוכיחו שניתן לצבוע (לאו דווקא צביעה חוקית) את קודקודי G ב 3 צבעים כך שלפחות $2/3$ מהקשתות אינן מונוכרומטיות.
קשת $e=(u,v)$ נקראת מונוכרומטית אם הצבע של u שווה לצבע של v .

בהצלחה!