

המשפט היסודי של אלגברה:

משפט: יהי $f \in \mathbb{C}[z]$ פולינום ממעלה $\deg(f) > 0$. אז קיים לו שורש ב- \mathbb{C} .

סידרה הבאה של תרגילים מביאה להוכחה של המשפט:

1. יהי $a \in \mathbb{C}$ כלשהו. הראה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{C}$.
2. יהי $f \in \mathbb{C}[z]$ פולינום ממעלה $\deg(f) > 0$, ויהי $z_0 \in \mathbb{C}$ כלשהו עבורו $f(z_0) \neq 0$. הראה כי קיימים $b \in \mathbb{C}, h \in \mathbb{C}[z]$, ו- $k \in \mathbb{N}$ עבורם $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^k (b + (z - z_0)h(z))$. הראה כי קיים $z_1 \in \mathbb{C}$ עבורו $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. רמז: העזר בתרגיל הראשון והראה כי מספיק להוכיח את הטענה עבור המקרה הפרטי הבא: $f(z_0) = b = 1$. ע"מ להוכיח את הטענה עבור המקרה הפרטי הזה הראה כי אם $|z_1 - z_0|$ "קטן" אז גם $|(z - z_0)h(z)|$ "קטן".
3. יהי $f \in \mathbb{C}[z]$ פולינום ממעלה $\deg(f) > 0$. הראה כי הפונקציה $|f(z)|$ מקבלת מינימום ב- \mathbb{C} , כלומר קיים $z_0 \in \mathbb{C}$ עבורו $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ לכל $z \in \mathbb{C}$. הראה בעזרת התרגיל השני כי $0 = f(z_0)$. רמז: הראה קודם שאם $|z|$ "גדול" אז גם $|f(z)|$ "גדול", ואז השתמש במשפט האומר שפונקציה רציפה בתחום סגור וחסום ב- \mathbb{R}^2 מקבלת מינימום.

הערה: קיימות הוכחות "יותר אלגבריות" אך הן דורשות ידע רב יותר או מספר טריקים, כמו כן בהמשך הלימודים תראו הוכחה יפה של המשפט בקורס על תורת הפונקציות המרוכבות.