מבוא לאלגברה קומוטטיבית

המרצה: איליה טיומקין

1) הוכיחו את המשפט קיילי המילטון עבור מטריצות $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ באופן הבא:
   א. הראו כי אם A לכסינה אז $P_A(A) = 0$.
   ב. הראו שקבוצת המטריצות בעלות n ע"ע שונים צפופה במרחב המטריצות.
2) יהי K שדה, $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in K[x]$ פולינומים, $a_n, b_m \neq 0$.
   א. הראו כי $\gcd(f,g) \neq 1$ אם ורק אם $\det\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = 0$ (במטריצה יש m שורות עם a_i ו- n שורות עם b_i). הדטרמיננטה הזו נקראת ***הרזולטנטה*** של שני הפולינומים, אותה מסמנים $R(f,g)$. <u>רמז:</u> קשרו את שתי הטענות לתלות לינארית של $f, xf, \dots, x^{m-1}f, g, xg, \dots, x^{n-1}g$.
   ב. הוכיחו כי ל- f יש גורם כפול אם ורק אם $R(f,f') = 0$ כאשר f' מסמן את הנגזרת של f.
   ג. היעזרו בסעיף ב' ע"מ לתת הוכחה אלגברית למשפט קיילי-המילטון מעל שדה סגור אלגברית כלשהוא. <u>רמז:</u> הראו קודם שכל פולינום ב- r משתנים השונה מאפס מגדיר פונקציה השונה מאפס על K^r אם השדה K אינסופי. מותר להשתמש ללא הוכחה בכך שכל שדה סגור אלגברית אינסופי.
3) יהי $n \in \mathbb{N}$, ויהי $n = \prod p^{m_p}$ הפירוק לגורמים ראשוניים שונים. הוכיחו כי n ניתן להצגה כסכום של שני ריבועים של מספרים שלמים אם ורק אם מתקיים: $p \equiv 3 \ (mod\ 4) \Leftarrow 2|m_p$.
4) (*למה של גאוס*) יהי R תחום פריקות יחידה, $K = Frac(R)$, ויהיו $f, g \in R[x]$ פולינומים פרימיטיביים. הוכיחו כי
   א. fg פרימיטיבי;
   ב. $f \in R[x]$ אי פריק אם ורק אם $f \in K[x]$ אי פריק.
5) יהי $\omega = e^{2\pi i/3}$.
   א. הוכיחו כי $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.
   ב. מצאו את כל האיברים ההפיכים ב- $\mathbb{Z}[\omega]$.
   ג. הוכיחו כי $\mathbb{Z}[\omega]$ הוא תחום אוקלידי ולכן גם תחום פריקות יחידה.
   ד. יהי $p > 3$ ראשוני. הוכיחו כי $p \equiv 1 \ (mod\ 6)$ אם ורק אם קיימים $a, b \in \mathbb{Z}$ עבורם $p = a^2 + 3b^2$.
6) יהי R חוג ויהי $e \in R$ *אידמפוטנט*, כלומר איבר המקיים: $e^2 = e$. הוכיחו כי
   א. $1 - e$ אידמפוטנט,
   ב. התת קבוצה eR סגורה ביחס לחיבור וכפל, ומהווה חוג בעצמה עם יחידה e. שימו לב! השיכון $eR \to R$ אינו הומומורפיזם כי הוא לא לוקח את e ל- 1, ולכן eR אינו תת חוג של R.
   ג. $eR \subset R$ אידאל.
   ד. $R = eR \times (1-e)R$ כאשר מכפלת חוגים מוגדרת כמכפלת קבוצות עם פעולות לפי הקואורדינטות.
7) יהי R חוג, $I_1, \dots, I_n \subset R$ אידאלים המקיימים: $I_k + I_r = R$ לכל $k \neq r$. הוכיחו באינדוקציה כי
   א. $I_1I_2 \dots I_n = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n$, כאשר $I_1I_2 \dots I_n$ מסמן את האידאל הנוצר ע"י כל המכפלות $a_1a_2 \dots a_n$ עם $a_i \in I_i$ לכל i;
   ב. (*משפט השאריות הסיני*) ההומומורפיזם הטבעי $R/I_1I_2 \dots I_n \to \prod_{i=1}^n R/I_i$ הוא איזומורפיזם.