מבוא לאלגברה קומוטטיבית

המרצה: איליה טיומקין

1) תנו דוגמה של חוג נתרי ואידאל שאינו פרימרי, אבל בעל רדיקאל ראשוני.
2) יהי $\phi: R' \to R$ הומומורפיזם של חוגים נתריים ו- $Q \subset R$ אידאל פרימרי. הוכיחו כי $\phi^{-1}(Q) \subset R'$ פרימרי.
3) יהיו $R = \mathbb{C}[x,y,z]$, $I = (xy, x - yz) \subset R$. מצאו את הראשוניים הנלווים של R/I ופירוק פרימרי מצומצם של I.
4) יהיו $R = \mathbb{C}[x,y,z]/(xy - z^2)$, $I = (x,z) \subset R$. מצאו את הראשוניים הנלווים של R/I^2 ופירוק פרימרי מצומצם של I^2.
5) יהיו R חוג נתרי ו- M R-מודול. הוכיחו כי אם $\mathfrak{p} \in Supp(M)$ אז קיים $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \in Ass_R(M)$. רמז: הראו קודם שמספיק להוכיח את הטענה עבור מודולים נוצרים סופית.
6) יהיו R חוג נתרי, $S \subset R$ קבוצה כפלית, M R-מודול נוצר סופית ו- $N \subsetneq M$ תת מודול. נניח כי $N = \cap_{i=1}^{r} Q_i$ הוא פירוק פרימרי מצומצם. נסמן $\mathfrak{p}_i$ הראשוני הנלווה של M/Q_i ונניח כי $\mathfrak{p}_i \cap S = \emptyset$ לכל $1 \leq i \leq t$ ו- $\mathfrak{p}_i \cap S \neq \emptyset$ לכל $t < i \leq r$. הוכיחו כי $S^{-1}N = \cap_{i=1}^{t} S^{-1}Q_i$ הוא פירוק פרימרי מצומצם של $S^{-1}N \subset S^{-1}M$ מעל החוג $S^{-1}R$.

שני תרגילי חזרה

7) יהיו R חוג, $I \subseteq Rad(R)$ אידאל, M R-מודול נוצר סופית ו- $N \subseteq M$ תת מודול. הוכיחו כי $N = \cap_{n\geq 0} (N + I^n M)$.
8) (למת פיטינג) יהי $\phi: R \to R$ אוטומורפיזם של חוג נתרי. הוכיחו כי קיים $n \geq 0$ עבורו $Ker(\phi^n) \cap Im(\phi^n) = \{0\}$. האם טענה דומה נכונה גם לחוגים שאינם נתריים?