מבוא לאלגברה קומוטטיבית

המרצה: איליה טיומקין

1) יהיו $\mathbb{C}((t))$ שדה טורי לורן ו- $K = \cup_{N\geq 1} \mathbb{C}((t^{\frac{1}{N}}))$ שדה טורי פייזו (Puiseux).

א. הוכיחו כי ההרחבה $\mathbb{C}((t^{\frac{1}{N}}))/\mathbb{C}((t))$ היא הרחבה סופית, והסיקו מזה ש- $K/\mathbb{C}((t))$ הוא הרחבה אלגברית.

ב. תהי $\nu: K \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ההערכה הטבעית, ו- $R \subset K$ חוג הערכה. תארו את כל האידאלים ב- R. הוכיחו כי $Spec(R)$ מורכב משתי נקודות בלבד, והאידאל המקסימלי של R אינו נוצר סופית.

<u>הערה:</u> כפי שאמרנו בשיעור, אפשר להוכיח ששדה טורי פייזו הוא סגור אלגברי של שדה טורי לורן.

2) יהיו R חוג הערכה בדידה ו- K שדה מנות שלו. הוכיחו כי לכל תת חוג ביניים $R \subseteq R' \subseteq K$ מתקיים: $R' = K$ או $R' = R$. האם טענה דומה נכונה גם עבור חוגי הערכה לא בדידה? האם אתם יכולים לתאר את חוגי הערכה עבורם הטענה מתקיימת?

3) יהי $\mathbb{C}[x] \subseteq R \subseteq \mathbb{C}[\![x]\!]$ תת חוג. נניח כי R מקומי והאידאל המקסימלי שלו נוצר ע"י x. הוכיחו כי לכל $0 \neq a \in R$ קיימים ויחידים $u \in R^{\times}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ עבורם $a = ux^n$. הסיקו מזה ש- R הוא חוג הערכה.

4) הוכיחו כי כל לוקליזציה באידאל מקסימלי של $\mathbb{Z}$ ושל $K[x]$ (כאשר K שדה) היא חוג הערכה בדידה.

5) תהי $\mathbb{Z}^2$ חבורה אבלית עם סדר לקסיקוגרפי. נגדיר פונקציה $\nu: \mathbb{C}(x,y) \to \mathbb{Z}^2$ ע"י $\nu\left(\frac{f}{g}\right) = \nu(f) - \nu(g)$ כאשר לכל פולינום $f = \sum_{m\in\mathbb{Z}^2} a_m x^{m_1} y^{m_2}$ מגדירים $\nu(f) = \inf\{m | a_m \neq 0\}$. נסמן $R = \left\{\frac{f}{g} \middle| \nu\left(\frac{f}{g}\right) \geq 0 = (0,0)\right\}$.

א. הוכיחו כי R הוא חוג הערכה.

ב. תארו את R בצורה מפורשת.

6) יהי R תחום פריקות יחידה, $f \in R$ אי-פריק, ו- $\mathfrak{p} = (f)$. הוכיחו כי $R_{\mathfrak{p}}$ חוג הערכה בדידה.

7) יהי R חוג הערכה. הוכיחו כי הכלה של אידאלים מגדירה סדר מלא על $Spec(R)$, וב- $Spec(R)$ יש את האיבר המינימלי והאיבר המקסימלי (מהם?). משמעות התרגיל היא שספקטרום של חוג הערכה הוא שרשרת של נקודות שבין כל שתי נקודות אחת מוכלת בסגור של השניה.

8) יהיו R חוג הערכה עם אידאל מקסימלי $\mathfrak{m}$, ו- S חוג הערכה בעל שדה מנות $R/\mathfrak{m}$. נגדיר $T = \phi^{-1}(S)$ כאשר $\phi: R \to R/\mathfrak{m}$ מסמן את ההומומורפיזם הטבעי. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $Frac(T) = Frac(R)$;

ב. T חוג הערכה;

ג. T חוג הערכה בדידה אם"ם R חוג הערכה בדידה.