מבוא לאלגברה קומוטטיבית

המרצה: איליה טיומקין

1) יהי R תחום שלמות נתרי ממימד 1. הוכיחו כי R הוא חוג דדקינד אם"ם כל אידאל פרימרי ב- R הוא חזקה של אידאל ראשוני.
2) יהי R תחום דדקינד. נניח כי $Spec(R) = \{(0), \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$. הוכיחו כי
   א. קיימים $x_1, \dots, x_r \in R$ עבורו $\nu_j(x_i) = \delta_{ij}$ כאשר ν_j מסמן את ההערכה המתאימה לאידאל $\mathfrak{p}_j$;
   ב. $\mathfrak{p}_i$ ראשי לכל i;
   ג. R הוא תחום אידאלים ראשיים.
3) יהי R תחום דדקינד. הוכיחו כי
   א. לכל $0 \neq a \in R$ מתקיים $R/(a)$ תחום אידאלים ראשיים.
   ב. כל אידאל ב- R נוצר ע"י לכל היותר שני איברים.
4) יהי R תחום דדקינד. לכל פולינום $f = a_0 + \dots + a_n x^n \in R[x]$ נגדיר *אידאל התוכן* $c(f) \coloneqq (a_0, \dots, a_n)$. הוכיחו כי לכל זוג פולינומים $f, g \in R[x]$ מתקיים: $c(f)c(g) = c(fg)$.
5) יהיו R תחום דדקינד ו- M R-מודול נוצר סופית. נניח כי M הוא מודול *פיתול*, כלומר לכל $x \in M$ המאפס של x שונה מאפס. הוכיחו כי קיימים $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r \in Spec(R)$ שונים מאפס ומספרים טבעיים $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ עבורם $M \simeq \bigoplus_{i=1}^r R/\mathfrak{p}_i^{m_i}$.