מבוא לאלגברה קומוטטיבית

המרצה: איליה טיומקין

1) חשבו את
   א. $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$;
   ב. $R/I \otimes_R R/J$ כאשר $I, J \subset R$ אידאלים.
2) יהיו K שדה, W מרחב וקטורי, ו- $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ סמ"ק של מרחבים וקטוריים. הוכיחו כי
   א. הסדרה $0 \to V' \otimes_K W \to V \otimes_K W \to V'' \otimes_K W \to 0$ מדויקת.
   ב. אם $0 \neq v \in V, 0 \neq w \in W$ אז $0 \neq v \otimes w \in V \otimes_K W$.
3) יהיו R חוג, $S \subset R$ קבוצה כפלית ו- M R-מודול. הוכיחו כי $S^{-1}M = M \otimes_R S^{-1}R$.
4) יהיו R חוג ו- S, T R-אלגבראות. נגדיר על $S \otimes_R T$ פעולת כפל ע"י $(s \otimes t)(s' \otimes t') = ss' \otimes tt'$. הוכיחו כי
   א. הפעולה מוגדרת היטב;
   ב. $S \otimes_R T$ היא R-אלגברה;
   ג. העתקות $\phi: s \mapsto s \otimes 1$ ו- $\psi: t \mapsto 1 \otimes t$ הן הומומורפיזמים של R-אלגבראות;
   ד. $S \otimes_R T$ מקיימת את התכונה האוניברסלית הבאה: לכל זוג של הומומורפיזמים $\alpha: S \to P, \beta: T \to P$ של R-אלגבראות קיים ויחיד הומומורפיזם $\chi: S \otimes_R T \to P$ עבורו $\alpha = \chi \circ \phi, \beta = \chi \circ \psi$.
5) חשבו את האלגבראות הבאות:
   א. $\mathbb{R}[x, y] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$;
   ב. $R[x] \otimes_R R[y]$;
   ג. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$;
   ד. $\mathbb{F}_p(t) \otimes_{\mathbb{F}_p(x)} \mathbb{F}_p(t)$ כאשר ההומומורפיזם $\mathbb{F}_p(x) \to \mathbb{F}_p(t)$ מוגדר ע"י $f(x) \mapsto f(t^p) = \left(f(t)\right)^p$.
6) יהיו R חוג, S R-אלגברה, M R-מודול ו- N S-מודול. הוכיחו כי
   א. על $M \otimes_R S$ יש מבנה טבעי של S-מודול ועל N יש מבנה טבעי של R-מודול;
   ב. $(M \otimes_R S) \otimes_S N = M \otimes_R N$
7) תהי Δ פירמידה משוכללת בנפח אחד.
   א. חשבו את ערכי המקצועות של Δ ואת הזוויות בין הפאות של Δ;
   ב. חשבו את אינווריאנטת דאן של Δ;
   ג. (למי שלמד תורת גלואה) הוכיחו שאם $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}): \mathbb{Q}] \leq 2$ אז $n \in \{1,2,3,4,6\}$.
   ד. בעזרת סעיף ג', הוכיחו כי $\frac{\cos^{-1}(1/3)}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, והסיקו מזה שאינווריאנטת דאן של Δ שונה מאפס.
8) (למי שלמד תורת גלואה) יהיו K שדה ו- $F = K[a]$ הרחבה אלגברית. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים
   א. F/K פרידה (ספרבילית),
   ב. $\bar{K} \otimes_K F$ היא אלגברה ללא נילפוטנטים כאשר $\bar{K}$ מסמן סגור אלגברי של K,
   ג. $F \otimes_K F$ היא אלגברה ללא נילפוטנטים.