מבוא לאלגברה קומוטטיבית

המרצה: איליה טיומקין

1) יהיו R חוג ו- $I,J \subset R$ אידאלים. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   א. אם $\sqrt{I}=I$ ו- $\sqrt{J}=J$ אז $\sqrt{J\cap I}=J\cap I$.
   ב. אם $\sqrt{I}=I$ ו- $\sqrt{J}=J$ אז $\sqrt{JI}=JI$.
   ג. אם $\sqrt{I}=I$ ו- $\sqrt{J}=J$ אז $\sqrt{J+I}=J+I$.
   ד. קיימים I,J כך ש- $IJ \neq I\cap J$.
   ה. אם I,J ראשוניים אז $J\cap I$ ראשוני.
   ו. אם I,J ראשוניים אז JI ראשוני.
   ז. אם I,J ראשוניים אז $J+I$ ראשוני.
2) יהיו R חוג, $a\in R^{\times}$ ו- $b\in Nil(R)$. הוכיחו כי $a+b\in R^{\times}$.
3) הוכיחו כי אם $\mathfrak{p}\subset R$ אידאל ראשוני ו- $X\subseteq \mathfrak{p}$ תת קבוצה אז קיים אידאל ראשוני מינימלי (ביחס להכלה) המוכל ב- $\mathfrak{p}$ והמכיל את X.
4) יהי R חוג, כך שהקבוצה M של האידאלים הראשוניים המינימליים ב- R היא סופית. הוכיחו שגרעין ההומומורפיזם הטבעי $\psi: R\to \prod_{\mathfrak{p}\in M} R/\mathfrak{p}$ הוא $Nil(R)$, ולכל $\mathfrak{p}\in M$ קיים $a\in R$ כך ש- $\psi(a)_{\mathfrak{p}}\neq 0$ ו- $\psi(a)_{\mathfrak{q}}=0$ לכל $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}\in M$. הסיקו מזה שאם ב- R יש אידאל ראשוני מינימלי יחיד אז $R/Nil(R)$ הוא תחום שלמות.
5) יהיו R חוג ו- $I_1,\dots,I_n,J\subseteq R$ אידאלים כך ש- $J\subseteq I_1\cup\dots\cup I_n$. הוכיחו כי
   א. הוכיחו כי אם קיים שדה אינסופי K והומומורפיזם $K\to R$ אז קיים i כך ש- $J\subseteq I_i$.
   ב. הוכיחו כי אם $I_3,\dots,I_n$ ראשוניים אז קיים i כך ש- $J\subseteq I_i$. שימו לב, בסעיף זה מספיק להניח ש- $J\subseteq R$ תת קבוצה הסגורה ביחס לכפל וחיבור.
   ג. תנו דוגמה לחוג ואידאלים המקיימים את הנתון כך שלכל i מתקיים $J\nsubseteq I_i$.
6) הוכיחו כי האידאל $(x,y)\subset \mathbb{C}[x,y]$ אפשר להציג כאיחוד של אידאלים ראשוניים המוכלים בו ממש.
7) תארו בצורה מפורשת את $Spec(\mathbb{C}[x])$, $Spec(\mathbb{R}[x])$ ואת ההעתקה הטבעית $Spec(\mathbb{C}[x])\to Spec(\mathbb{R}[x])$ המתאימה לשיכון $\mathbb{R}[x]\to\mathbb{C}[x]$.
8) הוכיחו את התכונה האוניברסלית של שדה מנות: יהיו R תחום שלמות ו- $K=Frac(R)$ שדה המנות שלו. אז לכל שדה L ולכל שיכון $\phi: R\hookrightarrow L$ קיים ויחיד שיכון $\iota: K\hookrightarrow L$ כך ש- $\phi=\iota_{|R}$.
9) תהי $K\subseteq F$ הרחבה של שדות. הוכיחו כי
   א. קיימת העתקה טבעית $\psi_F: F^n\to Spec(K[x_1,\dots,x_n])$ המתאימה לנקודה $a\in F^n$ את הגרעין של הומומורפיזם ההצבה $\phi_a: K[x_1,\dots,x_n]\to F$ המוגדר ע"י $\phi_a(f)=f(a)$.
   ב. $Spec(K[x_1,\dots,x_n])=\cup_{L/K} Im(\psi_L)$.
   ג. אם $K\subseteq F$ הרחבה אלגברית אז $Im(\psi)\subseteq Specm(K[x_1,\dots,x_n])$. הערה: נראה בהמשך שאם F הוא סגור אלגברי של K אז $Im(\psi)=Specm(K[x_1,\dots,x_n])$.
   ד. נסו לתת תנאי הכרחי ומספיק על $a\in F_1, b\in F_2$ ע"מ ש- $\psi_{F_1}(a)=\psi_{F_2}(b)$.
10) יהיו R חוג ו- $JacRad(R)\subseteq R$ רדיקאל ג'קובסון, כלומר החיתוך של כל האידאלים המקסימליים של R. הוכיחו כי $x\in JacRad(R)$ אם ורק אם $1-xy\in R^{\times}$ לכל $y\in R$.