מבוא לאלגברה קומוטטיבית

המרצה: איליה טיומקין

1) יהיו R תחום שלמות, $a \in R$ ו- $R[a^{-1}] \subseteq Frac(R)$ תת חוג הנוצר ע"י R ו- a^{-1}. הוכיחו כי $R[a^{-1}]$ הוא R-מודול נוצר סופית אם ורק אם $R[a^{-1}] = R$, כלומר $a^{-1} \in R$.

2) יהיו R חוג, A קבוצה ו- N, M_α עבור $\alpha \in A$ R-מודולים.

א. בנו הומומורפיזם טבעי $\psi: \bigoplus_{\alpha \in A} Hom_R(N, M_\alpha) \to Hom_R(N, \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha)$.

ב. הראו כי ψ חח"ע.

ג. הראו כי אם N נוצר סופית אז ψ איזומורפיזם. האם ההנחה על N הכרחית?

3) יהיו N, M, K R-מודולים ו- $\phi \in Hom_R(K, N), \psi \in Hom_R(K, M)$ הומומורפיזמים. נתבונן בבעיה האוניברסלית הבאה: מחפשים מודול L יחד עם הומומורפיזמים $\alpha \in Hom_R(N, L), \beta \in Hom_R(M, L)$ כך ש- $\alpha \circ \phi = \beta \circ \psi$ ולכל מודול L' והומומורפיזמים $\alpha' \in Hom_R(N, L'), \beta' \in Hom_R(M, L')$ המקיימים $\alpha' \circ \phi = \beta' \circ \psi$ קיים ויחיד הומומורפיזם $\chi \in Hom_R(L, L')$ כך ש- $\alpha' = \chi \circ \alpha$ ו- $\beta' = \chi \circ \beta$. שרטטו דיאגרמה מתאימה והוכיחו כי לבעיה זו יש פתרון ע"י בניה מפורשת של הפתרון. הפתרון לבעיה זו נקרא *סכום מסויב (Fibered sum)* ומסמנים אותו $N \oplus_K M$. שימו לב! אם $K = 0$ אז הסכום המסויב הוא סכום ישר רגיל. כמו עם הסכום הישר אפשר לדבר על סכום מסויב מעל K של משפחה כלשהיא של מודולים.

4) הפכו את כל החצים בתרגיל הקודם ופתרו את הבעיה האוניברסלית הדואלית. פתרונה נקרא *מכפלה מסויבת (Fibered product)* ומסומנת $N \times_K M$.

5) יהיו $R \neq 0$ חוג, $m, n \in \mathbb{N}$ ו- $a_1, \dots, a_n \in R^n$. הוכיחו כי

א. אם $a_1, \dots, a_n$ יוצרים את R^n אז הם בת"ל מעל R.

ב. $R^n \simeq R^m$ אם"ם $n = m$.

6) יהיו R חוג ו- $I \subseteq R$ אידאל נוצר סופית המקיים $I^2 = I$. הוכיחו כי קיים ויחיד אידמפוטנט $e \in R$ כך ש- $I = eR$.

7) יהיו R חוג ו- $I \subseteq JacRad(R)$ אידאל (למשל R הוא חוג מקומי ו- I הוא האידאל המקסימלי). יהיו $N \subseteq M$ שני R-מודולים. הוכיחו כי

א. (למת נקאימה גרסה ג') אם $IM = M$ ו- M נוצר סופית אז $M = 0$.

ב. אם $M = N + IM$ ו- M/N נוצר סופית אז $M = N$.

ג. אם M נוצר סופית ו- $m_1, \dots, m_k \in M$ אז $m_1, \dots, m_k \in M$ יוצרים אם ורק אם $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_k \in M/IM$ יוצרים.

ד. בהנחות של סעיף ג', אם בנוסף R מקומי ו- I הוא האידאל המקסימלי אז $m_1, \dots, m_k \in M$ היא קבוצת יוצרים מזערית (כלומר, לא ניתן לדלל אותה ולקבל קבוצת יוצרים) אם ורק אם $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_k$ הם בסיס של המרחב הוקטורי M/IM מעל השדה R/I. הסיקו מזה שבתנאים של התרגיל, מספר היוצרים בקבוצה יוצרת מזערית אינו תלוי בקבוצה. שימו לב! הדבר אינו נכון באופן כללי כפי שראינו בכיתה.

8) תהי $0 \to K \to N \to M \to 0$ סדרה מדויקת קצרה (סמ"ק) של מודולים.

א. הוכיחו כי אם N נוצר סופית אז M נוצר סופית.

ב. הוכיחו כי אם M, K נוצרים סופית אז N נוצר סופית.

ג. תנו דוגמה של חוג וסדרה מדויקת כנ"ל כך ש- N נוצר סופית אך K אינו נוצר סופית.

9) יהיו R תחום פריקות יחידה ו- $I \subset R$ אידאל הנוצר ע"י שני איברים $a, b \in I$ ללא גורמים משותפים. בנו סדרה מדויקת קצרה $0 \to R \to R^2 \to I \to 0$. נסו להכליל את התרגיל למקרה ש- I נוצר ע"י שלושה איברים זרים בזוגות והסדרה המדויקת היא $0 \to R \to R^3 \to R^3 \to I \to 0$. שימו לב! משמעות הסדרה הראשונה היא ש- I נוצר ע"י שני יוצרים ויש בין היוצרים יחס אחד בסיסי. במקרה השני, מדובר בכך שיש שלושה יוצרים, שלושה יחסים בסיסיים בין היוצרים, אך יש גם יחס בין היחסים הללו.

<u>הגדרה:</u> אומרים ש- R-מודול M *מיוצג סופית* אם ורק אם קיימת סדרה מדויקת $R^m \to R^n \to M \to 0$. משמעות ההגדרה היא שאפשר לתאר את המודול בעזרת <u>מספר סופי של יוצרים ויחסים.</u>

10) יהיו R חוג M R-מודול.

א. הוכיחו כי אם M מיוצג סופית אז הוא נוצר סופית.

ב. תנו דוגמה של חוג ומודול נוצר סופית שאינו מיוצג סופית.

ג. הוכיחו כי M מיוצג סופית אם ורק אם קיימת סמ"ק $0 \to K \to N \to M \to 0$ כך ש- N מיוצג סופית ו- K נוצר סופית.

ד. אם קיימת סמ"ק $0 \to M \to N \to L \to 0$ כך ש- N נוצר סופית ו- L מיוצג סופית אז M נוצר סופית.

ה. אם קיימת סמ"ק $0 \to K \to M \to N \to 0$ כך ש- K, N מיוצגים סופית אז גם M מיוצג סופית.